



11

Formules en variabelen

Wat leer je?

- Gebieden tekenen en interpreteren.
- Formules herleiden en omwerken.
- Rekenen met formules bij recht evenredige en omgekeerd evenredige verbanden.
- Redeneren met formules.
- Werken met wiskundige modellen.



Beginopdracht De rozenkweker

[▶ WERKBLAD] Kweker Jansma heeft enkele kassen bestemd voor het kweken van Toprozen. Om het predicaat Toproos te krijgen moeten de rozen aan een aantal criteria voldoen, zoals resistentie tegen ziektes, groeikracht, vorm en bloemkleur. Hiervoor worden de rozen vier keer in een jaar gekeurd. Na het toekennen van het predicaat wordt elke drie jaar opnieuw gekeurd.

Jansma heeft maximaal 900 m² in zijn kassen beschikbaar voor het kweken van Toprozen. Hij gaat rode en witte Toprozen kweken. Voor de rode rozen wil hij minimaal 250 m² en maximaal 600 m² gebruiken. Voor de witte rozen wil hij minimaal 200 m² en maximaal 500 m² gebruiken. Ook wil hij voor de rode rozen hoogstens anderhalf keer zoveel oppervlakte gebruiken als voor de witte rozen.

Om te zien welke mogelijkheden hij dan heeft, maakt Jansma de figuur hiernaast. Hij heeft het gebied gekleurd dat voldoet aan alle genoemde voorwaarden. In deze figuur zie je twee schuine lijnen. Bij de ene schuine lijn hoort de formule $W = \frac{2}{3}R$. De andere schuine lijn is k .



figuur 11.1

- Hoe volgt uit de tekst dat $R = 1\frac{1}{2}W$? Laat zien dat hieruit volgt dat $W = \frac{2}{3}R$.
- Jansma heeft maximaal 900 m² in zijn kassen beschikbaar. Hieruit volgt de vergelijking van k .
Geef deze vergelijking.
- Kan Jansma kiezen voor 520 m² rode rozen en 350 m² witte rozen? Licht toe.
En kan hij kiezen voor 350 m² rode rozen en 520 m² witte rozen? Licht toe.

Jansma wil nog een voorwaarde toevoegen. Hij wil minstens zoveel oppervlakte voor de rode rozen gebruiken als voor de witte rozen.

- Teken in de figuur op het werkblad de lijn die bij deze voorwaarde hoort.
Kleur daarna het gebied dat aan alle voorwaarden voldoet.

Gebruik bij de volgende vragen de figuur die je zojuist hebt getekend. Neem aan dat er per m² evenveel rode als witte rozen worden gekweekt.

- Op de veiling krijgt Jansma 80 cent voor een rode roos en 60 cent voor een witte roos.
Hoeveel m² kan Jansma het beste gebruiken voor de rode rozen en hoeveel m² voor de witte rozen als hij een zo groot mogelijke opbrengst wil hebben?
- Beantwoord dezelfde vraag nog eens als Jansma op de veiling 60 cent voor een rode roos krijgt en 80 cent voor een witte roos.

Voorkennis Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

Theorie A De vergelijking $ax + by = c$

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$. De grafiek is een rechte lijn.

Om de lijn k : $2x + 3y = 12$ te tekenen, bereken je de coördinaten van twee punten.

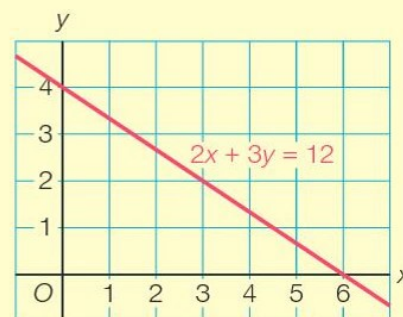
$x = 0$ geeft $2 \cdot 0 + 3y = 12$, dus $y = 4$

$y = 0$ geeft $2x + 3 \cdot 0 = 12$, dus $x = 6$

Zo krijg je de tabel

x	0	6
y	4	0

De lijn zie je in figuur 11.2.



figuur 11.2

Je kunt bij $2x + 3y = 12$ de variabele y vrijmaken.

Je krijgt $2x + 3y = 12$

$$3y = -2x + 12$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

Dus k : $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

Uit k : $y = -\frac{2}{3}x + 4$ lees je af dat van lijn k de richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{3}$ is.

Notatie $rc_k = -\frac{2}{3}$.

Ook van de lijn l : $y = -\frac{2}{3}x + 2$ is de richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{3}$.

Omdat $rc_k = rc_l$, zijn de lijnen k en l evenwijdig.

Je kunt de formule van l schrijven in de vorm $ax + by = c$.

Je krijgt $y = -\frac{2}{3}x + 2$

$$\frac{2}{3}x + y = 2$$

$$2x + 3y = 6$$

Dus l : $2x + 3y = 6$.

Ook aan deze vorm kun je zien dat de lijn l evenwijdig is met de lijn k : $2x + 3y = 12$, want in beide vergelijkingen is het linkerlid $2x + 3y$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $k: 3x - 2y = -2$ en $l: 3x - 2y = 8$.

- a Teken k en l in één figuur.
- b Bovendien is gegeven de lijn $m: y = -0,5x + 3$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en m .
- c De lijn n gaat door het punt $A(1, 4)$ en is evenwijdig met k .
Stel een vergelijking op van n in de vorm $ax + by = c$.

Uitwerking

a $k: 3x - 2y = -2$

x	0	$-\frac{2}{3}$
y	1	0

$l: 3x - 2y = 8$

x	0	$2\frac{2}{3}$
y	-4	0

b $k: 3x - 2y = -2$

Maak y vrij.

$$-2y = -3x - 2$$

$$y = 1,5x + 1$$

k snijden met m geeft $1,5x + 1 = -0,5x + 3$

$$2x = 2$$

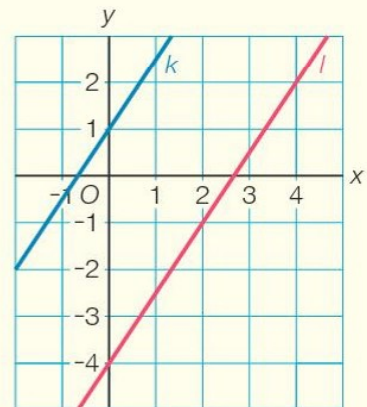
$$x = 1$$

$x = 1$ geeft $y = 1,5 \cdot 1 + 1 = 2,5$, dus het snijpunt is $(1; 2,5)$.

c n evenwijdig met k , dus $n: 3x - 2y = c$.

Door $A(1, 4)$ geeft $c = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = -5$.

Dus $n: 3x - 2y = -5$.



1 Zie het voorbeeld.

- a Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m .
- b De lijn p gaat door $O(0, 0)$ en is evenwijdig met k .
Stel een vergelijking op van p in de vorm $ax + by = c$.

2 Gegeven zijn de lijnen $k: 4x + y = 6$ en $l: 4x + y = 2$.

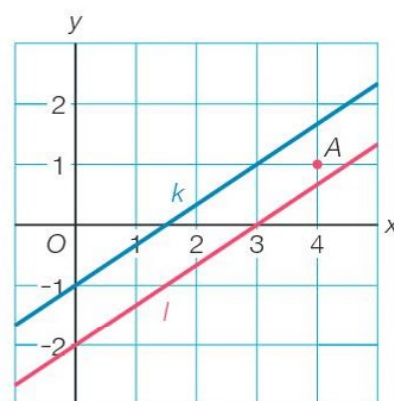
- a Teken k en l in één figuur.
- b Bovendien is gegeven de lijn $m: y = x - 1$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en m .
- c De lijn n gaat door het punt $A(3, 2)$ en is evenwijdig met k .
Stel een vergelijking op van n in de vorm $ax + by = c$.

11.1 Grafieken en gebieden

01
□ ⊗ *

In de figuur hiernaast zijn de lijnen k : $2x - 3y = 3$ en l : $2x - 3y = 6$ getekend.

- Bereken van k en l de richtingscoëfficiënt.
- De lijn m gaat door het punt $A(4, 1)$ en is evenwijdig met k .
Stel een vergelijking op van m in de vorm $ax + by = c$.



figuur 11.3

Theorie A Evenwijdige lijnen

De lijnen p : $y = 0,18x + 3$ en q : $y = 0,18x + 5$ zijn evenwijdig, omdat de richtingscoëfficiënten gelijk zijn. Er geldt $rc_p = rc_q = 0,18$.

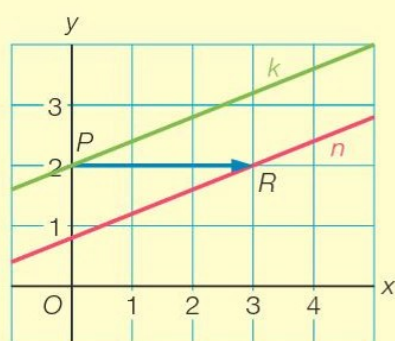
Ook de lijnen r : $3,4x + 1,5y = 6$ en s : $3,4x + 1,5y = 9$ zijn evenwijdig.

Lijnen met vergelijkingen van de vorm $ax + by = c$ zijn evenwijdig als het linkerlid gelijk is.

De lijn k : $y = 0,4x + 2$ snijdt de y -as in het punt $P(0, 2)$. De lijn k wordt 3 naar boven geschoven, zo krijg je de lijn l . Deze lijn is evenwijdig met k en snijdt de y -as in het punt $Q(0, 5)$. Dus de formule van l is $y = 0,4x + 5$.

De lijn k wordt 3 naar beneden verschoven, zo krijg je de lijn m : $y = 0,4x - 1$.

Je kunt k ook 3 naar rechts verschuiven. Zo krijg je de lijn n .



figuur 11.4

$$x_P = 0, \text{ dus } x_R = 0 + 3 = 3$$



De lijn n is evenwijdig met k en het punt $R(3, 2)$ ligt op n .

$R(3, 2)$ op $y = 0,4x + b$ geeft $0,4 \cdot 3 + b = 2$, dus $b = 0,8$.

Dus n : $y = 0,4x + 0,8$.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde zie je hoe je te werk gaat als je een lijn verschuift waarvan de vergelijking in de vorm $ax + by = c$ is gegeven.

Voorbeeld

Gegeven is de lijn k : $5x + 4y = 8$.

- a** De lijn k wordt 3 naar boven verschoven, zo ontstaat de lijn l .
Stel een vergelijking van l op in de vorm $ax + by = c$.
- b** De lijn k wordt 3 naar rechts verschoven, zo ontstaat de lijn m .
Stel een vergelijking van m op in de vorm $ax + by = c$.

Aanpak

Bereken de coördinaten van een punt op k en verschuif dit punt. Gebruik dat de verschoven lijn evenwijdig is met k , dus dat de vergelijking van de lijn van de vorm $5x + 4y = c$ is.

Uitwerking

- a** $x = 0$ geeft $y = 2$, dus $(0, 2)$ op k .
3 naar boven, dus $(0, 5)$ op l .
 l evenwijdig met k , dus l : $5x + 4y = c$.
 $(0, 5)$ op l geeft $c = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 5 = 20$.
Dus l : $5x + 4y = 20$.
- b** 3 naar rechts, dus $(3, 2)$ op m .
 m evenwijdig met k , dus m : $5x + 4y = c$.
 $(3, 2)$ op m geeft $c = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 23$.
Dus m : $5x + 4y = 23$.



Zie het voorbeeld.

- a** De lijn k wordt 4 naar beneden verschoven, zo ontstaat de lijn n .
Stel een vergelijking van n op in de vorm $ax + by = c$.
- b** De lijn k wordt 5 naar links verschoven, zo ontstaat de lijn p .
Stel een vergelijking van p op in de vorm $ax + by = c$.



- a** De lijn k : $2x - 3y = 12$ wordt 5 naar boven verschoven. Zo ontstaat de lijn l .
Stel een vergelijking van l op in de vorm $ax + by = c$.
- b** De lijn m : $y = 1,6x + 3$ wordt 4 naar rechts verschoven. Zo ontstaat de lijn n .
Stel de formule op van n .

**4**

Als een groot vrachtschip de motoren uitzet, dan neemt de snelheid langzaam af. In deze opgave nemen we aan dat er een lineair verband is tussen de snelheid en de tijd.

Een vrachtschip zet bij een snelheid van 30 km/uur de motoren uit. Het duurt vervolgens 45 minuten tot het schip stil ligt. De snelheid is te beschrijven met de formule $v = -\frac{2}{3}t + 30$. Hierin is v de snelheid in km/uur en t de tijd in minuten.

a Toon aan dat deze formule uit de gegevens volgt.

Als de beginsnelheid 22 km/uur is, dan geldt de formule $v = -\frac{2}{3}t + 22$.

b Bereken na hoeveel minuten het schip stil ligt als de beginsnelheid 22 km/uur is.

c Teken de grafieken van $v = -\frac{2}{3}t + 30$ en $v = -\frac{2}{3}t + 22$ in één figuur.

d In de figuur van vraag c kun je het gebied aangeven dat geldt als de beginsnelheid tussen 22 en 30 km/uur ligt.

Kleur dit gebied.

e Als 24 minuten na het uitzetten van de motoren de snelheid 10 km/uur is, geldt ook een formule van de vorm $v = -\frac{2}{3}t + b$.

Bereken b .

f Als bij een gegeven snelheid tijdens het afremmen de bijbehorende tijd moet worden berekend, is het handig als de formule in de vorm $t = av + b$ is geschreven.

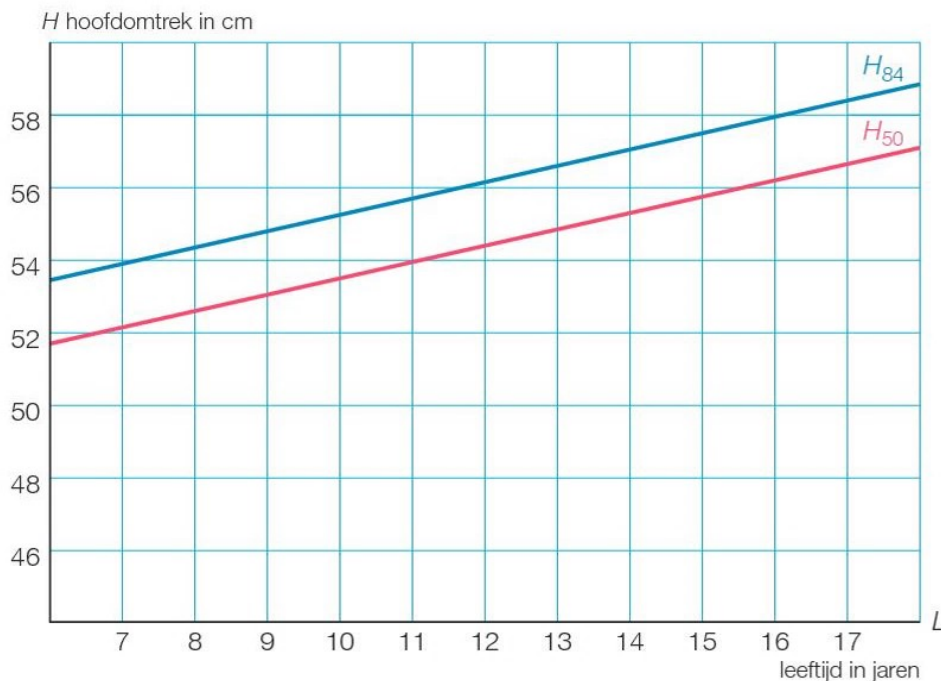
Schrijf de formule $v = -\frac{2}{3}t + 30$ in de vorm $t = av + b$.



[▶ **WERKBLAD**] Voor Nederlandse jongens van dezelfde leeftijd is de hoofdomtrek normaal verdeeld. De gemiddelde hoofdomtrek noteren we met H_{50} , omdat 50% van de jongens een kleinere hoofdomtrek heeft dan het gemiddelde.

Er bestaat een lineair verband tussen de hoofdomtrek en de leeftijd. Er geldt $H_{50} = 0,45L + 49$. Hierin is L de leeftijd in jaren met L tussen 6 en 18 en H_{50} de gemiddelde hoofdomtrek in cm.

Niet iedereen heeft bij een bepaalde leeftijd dezelfde hoofdomtrek. In de figuur hieronder zie je ook de lijn H_{84} . Deze lijn is evenwijdig met de lijn H_{50} . De lijn H_{84} ligt één standaardafwijking boven de lijn H_{50} . De standaardafwijking is 1,75 cm.



figuur 11.5

a Geef de formule van H_{84} .

De lijn H_{16} ligt één standaardafwijking onder de lijn H_{50} .

b Geef de formule van H_{16} en teken deze lijn in de figuur op het werkblad.

c Gebruik een vuistregel bij de normale verdeling om op het werkblad het gebied te kleuren waarin de hoofdomtrek van 95% van alle Nederlandse jongens tussen 6 en 18 jaar ligt.

d Als je bij een gemiddelde hoofdomtrek de leeftijd wilt berekenen, is het handig de formule van H_{50} te schrijven in de vorm $L = aH_{50} + b$. Schrijf de formule $H_{50} = 0,45L + 49$ in de vorm $L = aH_{50} + b$. Rond a af op twee decimalen en b op gehele.

e De formule $H_{50} = 0,45L + 49$ is ook te schrijven in de vorm $pH_{50} + qL = 1$.

Bereken p en q . Rond af op drie decimalen.

A6*****

Gegeven is de lijn $k: \frac{x}{250} + \frac{y}{350} = 1$.

De vergelijking van k is te schrijven in de vorm $7x + 5y = c$.

- Bereken c .
- De lijn m gaat door het punt $(3,6; 1,3)$ en is evenwijdig met k .
Stel van m een vergelijking op in de vorm $ax + by = c$ met a , b en c gehele getallen.
- De lijn $l: px + 8y = 2000$ is evenwijdig met k .
Bereken p .

07**□ ⊗ ***

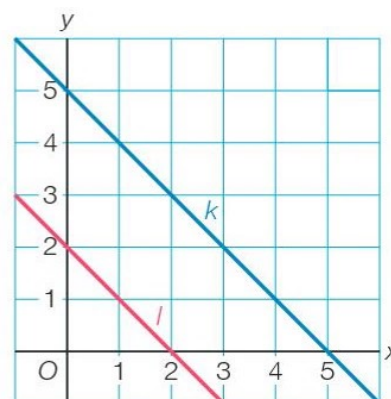
In figuur 11.6 zijn de lijnen $k: x + y = 5$ en $l: x + y = 2$ getekend.

De lijn $m: x + y = 3$ ligt tussen deze lijnen in.

- Licht dit toe.

Het gebied boven de lijn l kun je aangeven met de ongelijkheid $x + y > 2$.

- Geef de ongelijkheid van het gebied onder de lijn k .
- Welk gebied hoort bij de ongelijkheid $2 < x + y < 5$?

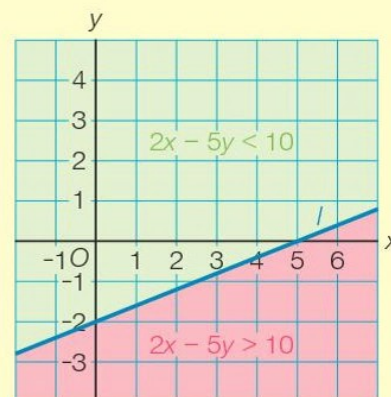


figuur 11.6

Theorie B De ongelijkheid $ax + by \leq c$

De lijn $l: 2x - 5y = 10$ verdeelt het vlak in twee **halfvlakken**. De grafiek van $2x - 5y > 10$ is het halfvlak dat bestaat uit alle punten waarvoor $2x - 5y > 10$ klopt. Om erachter te komen welk halfvlak bij $2x - 5y > 10$ hoort, vul je in de ongelijkheid de coördinaten van een handig gekozen punt in. Neem je bijvoorbeeld $(0, 0)$, dan krijg je $2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 > 10$ oftewel $0 > 10$; dit klopt niet. Dus de grafiek van $2x - 5y > 10$ is het halfvlak waarin $(0, 0)$ niet ligt. En zo is de grafiek van $2x - 5y < 10$ het halfvlak waarin $(0, 0)$ wel ligt. Zie figuur 11.7

Bij $ax + by \geq c$ hoort een **halfvlak met rand**. De rand is de lijn $ax + by = c$. Bij het tekenen van een halfvlak met rand geef je de rand dezelfde kleur als het halfvlak.



figuur 11.7

De grafiek van $ax + by \leq c$ is een halfvlak met rand begrensd door de lijn met vergelijking $ax + by = c$.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde zie je hoe je bij een lineaire ongelijkheid met twee variabelen de grafiek tekent.

Voorbeeld

Teken de grafiek van $2x + 3y \leq -6$.

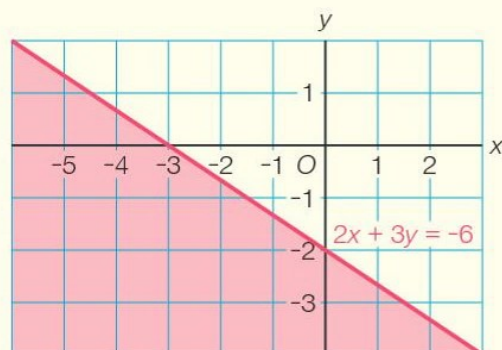
Uitwerking

De lijn $2x + 3y = -6$.

x	0	-3
y	-2	0

$(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \leq -6$; dit klopt niet.

Je moet het halfvlak met rand hebben waar $(0, 0)$ niet in ligt.



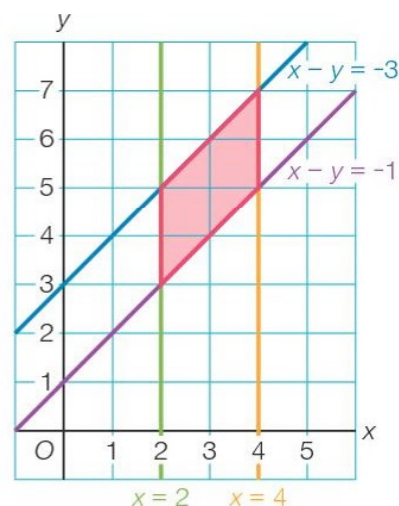
- 8** Teken in verschillende figuren de grafiek van
a $x + 2y \geq 2$ **b** $x - y \geq 2$ **c** $3x + y \leq -1$

- 9** Bij de ongelijkheid $2x + y \leq 0$ heb je niets aan $(0, 0)$ als controlepunt.
a Waarom is $(0, 0)$ geen geschikt controlepunt?
b Teken de grafiek van $2x + y \leq 0$.

- 10** Teken in verschillende figuren de grafiek van
a $x - y \geq 0$ **c** $3x - y \leq -1$ **e** $y \geq 3x$
b $x \geq 3$ **d** $y \leq 2$ **f** $x + y \geq 0$

- A11** Teken in verschillende figuren de grafiek van
a $2p - 3q \leq 6$ **b** $3F + 4G \leq 12$ **c** $N \leq 4 - t$

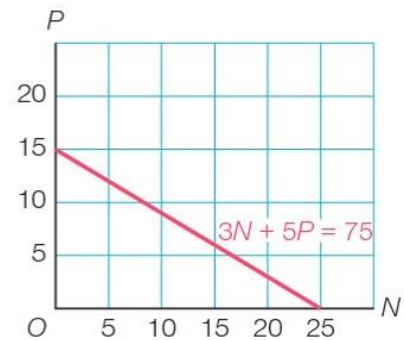
- 12** Voor het rode gebied in de figuur hiernaast geldt $2 \leq x \leq 4$ en $-3 \leq x - y \leq -1$.
Hierbij betekent $2 \leq x \leq 4$ dat het gebied tussen de lijnen $x = 2$ en $x = 4$ ligt.
En $-3 \leq x - y \leq -1$ betekent dat het gebied tussen de lijnen $x - y = -3$ en $x - y = -1$ ligt.
Het rode gebied voldoet aan zowel $2 \leq x \leq 4$ als $-3 \leq x - y \leq -1$.
Teken het gebied waarvoor geldt $1 \leq x \leq 4$ en $2 \leq x + y \leq 5$.



figuur 11.8

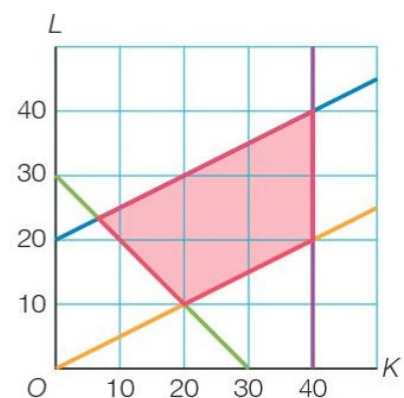
- 13** **a** Teken het gebied waarvoor geldt $1 \leq y \leq 2$ en $3 \leq x + y \leq 5$.
b Teken het gebied waarvoor geldt $2 \leq x \leq 5$ en $1 \leq y \leq 4$ en $6 \leq x + 2y \leq 10$.

- A14** In figuur 11.9 is de lijn $3N + 5P = 75$ getekend.
 Neem de figuur over en teken hierin het gebied waarvoor geldt $5 \leq N \leq 20$ en $5 \leq P \leq 20$ en $75 \leq 3N + 5P \leq 125$.



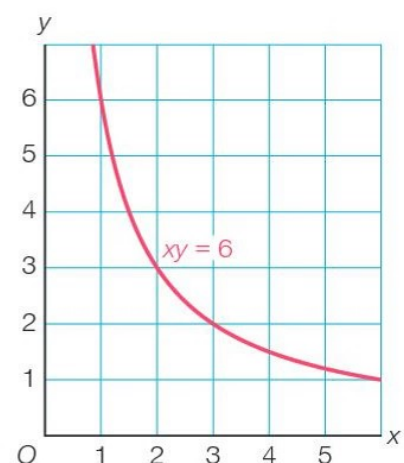
figuur 11.9

- 15** Het gebied in figuur 11.10 is begrensd door rode lijnen.
 Twee van deze lijnen zijn $K - 2L = 0$ en $K - 2L = 40$.
 Schrijf de ongelijkheden op die bij dit gebied horen.



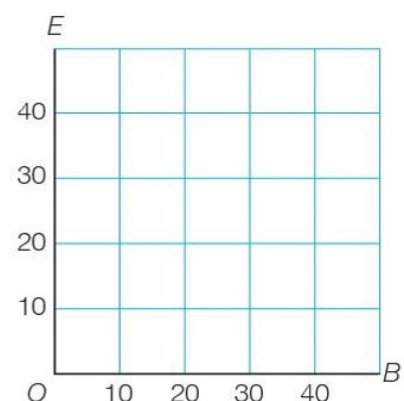
figuur 11.10

- A16** [▶WERKBLAD] In figuur 11.11 is de grafiek van $xy = 6$ getekend.
 Teken op het werkblad het gebied waarvoor geldt $xy \leq 6$ en $x \geq 1$ en $-1 \leq x - y \leq 1$.



figuur 11.11

- A17** [▶WERKBLAD] In een nieuw aan te leggen plantsoen wil men beuken en eiken planten. Er is plaats voor maximaal 40 bomen. Verder wil men minimaal 10 en ten hoogste 25 eiken en ook minstens evenveel eiken als beuken. Noem het aantal beuken B en het aantal eiken E .
a Welke ongelijkheden horen bij de situatie?
b Teken op het werkblad het gebied dat bij de ongelijkheden van vraag a hoort.
c Onderzoek met de figuur van vraag b hoeveel beuken men nog maximaal kan planten als wordt gekozen voor 15 eiken.



figuur 11.12

[▶ WERKBLAD] In ons voedsel zitten voedingsstoffen, zoals koolhydraten, eiwitten en vetten. Ons lichaam haalt energie uit deze voedingsstoffen. Om gezond te blijven is het belangrijk dat je niet te weinig energie binnenkrijgt, maar ook niet te veel. Een eenheid voor energie is kilocalorie (kcal).

De energiebehoefte is van veel factoren afhankelijk, bijvoorbeeld je leeftijd en hoe actief je bent. Het Europese voedselagentschap EFSA heeft onderzocht dat de gemiddelde energiebehoefte voor mensen van 17 jaar 2600 kcal per dag is.



In de tabel staat informatie en advies over verschillende voedingsstoffen.

voedingsstof	energie in kcal per gram	minimale aantal kcal per dag	maximale aantal kcal per dag
koolhydraten	4	1040	1820
eiwitten	4	260	650
vetten	9	geen	1040

Jori is 17 jaar en krijgt op een dag 275 gram koolhydraten, 150 gram eiwitten en 100 gram vetten binnen.

- Laat met een berekening zien dat Jori op deze dag 2600 kcal binnenkrijgt.
- Onderzoek of de hoeveelheden koolhydraten, eiwitten en vetten aan het advies voldoen.

Door een gebied te tekenen kun je onderzoeken welke samenstelling van voedingsstoffen aan het advies voldoen. We noemen het aantal gram koolhydraten dat iemand per dag binnenkrijgt x , het aantal gram eiwitten y en het aantal gram vetten z .

Uit de gegevens volgen de ongelijkheden $1040 \leq 4x \leq 1820$ en $260 \leq 4y \leq 650$.

- Licht deze ongelijkheden toe.

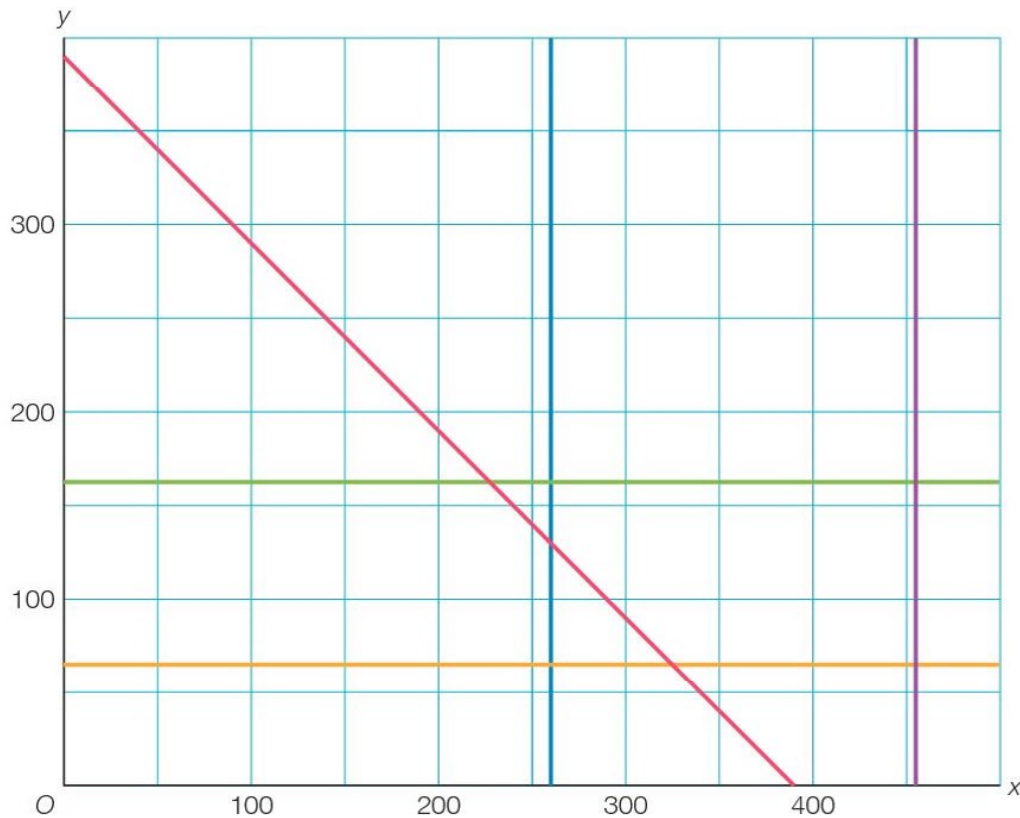
Er geldt $9z = 2600 - 4x - 4y$.

d Licht dit toe.

Uit $9z = 2600 - 4x - 4y$ en de gegevens volgt de ongelijkheid $2600 - 4x - 4y \leq 1040$.

e Licht dit toe.

In de figuur hieronder en op het werkblad zijn de lijnen getekend die bij de ongelijkheden horen.



figuur 11.13

f Teken op het werkblad het gebied dat voldoet aan de ongelijkheden.

Ada is 17 jaar en heeft een gemiddelde energiebehoefte.

g Ze eet 110 gram vetten en 150 gram eiwitten per dag.

Onderzoek of zij de adviezen over voedingstoffen hiermee opvolgt.

h Ada wil zich aan de adviezen houden, maar zo min mogelijk koolhydraten en zoveel mogelijk eiwitten binnenkrijgen.

Onderzoek met de figuur hoeveel gram koolhydraten, eiwitten en vetten zij dan binnen moet krijgen.

Terugblik

Evenwijdige lijnen

De lijnen $4x + 5y = 7$ en $4x + 5y = 11$ zijn evenwijdig. Dit kun je nagaan door van beide lijnen de richtingscoëfficiënt te berekenen. Deze richtingscoëfficiënt is $-0,8$.

Ook aan het linkerlid $4x + 5y$ van de beide vergelijkingen kun je zien dat de lijnen evenwijdig zijn.

Om een vergelijking op te stellen van de lijn n die door het punt $A(3, 8)$ gaat en evenwijdig is met de lijn $m : 5x - 2y = 4$, ga je uit van $5x - 2y = c$.

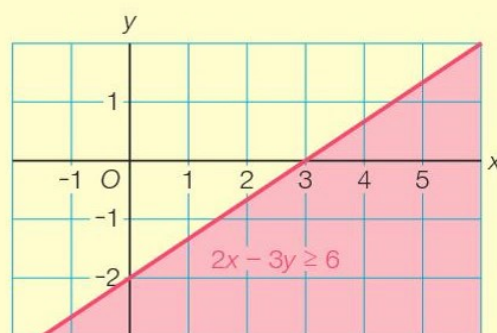
Je berekent c door de coördinaten van A in te vullen. Je krijgt $c = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 8 = -1$, dus een vergelijking van n is $5x - 2y = -1$.

Lineaire ongelijkheid met twee variabelen

Een voorbeeld van een lineaire ongelijkheid met twee variabelen is $2x - 3y > 6$.

De grafiek van $2x - 3y > 6$ is een halfvlak begrensd door de lijn $2x - 3y = 6$. Om te weten welk halfvlak, vul je in de ongelijkheid de coördinaten van een punt in, bijvoorbeeld van $(0, 0)$. Je krijgt $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 > 6$; dit klopt niet. Dus je moet het halfvlak hebben waar $(0, 0)$ niet in ligt.

Bij $2x - 3y \geq 6$ behoort ook de rand tot de grafiek. Geef de rand dezelfde kleur als het halfvlak.



Begrensde gebieden

In de figuur hiernaast zie je het gebied waarvoor geldt $x \geq 0$ en $1 \leq y \leq 3$ en $x - y \leq 0$ en $2x + y \leq 4$. Je hebt te maken met het gebied waar de halfvlakken

$x > 0$ (rechts van de y -as),

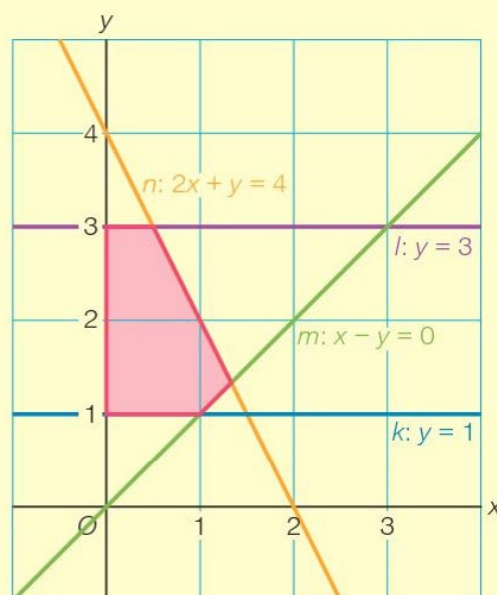
$1 < y < 3$ (tussen de lijnen k en l),

$x - y < 0$ (boven de lijn m) en

$2x + y < 4$ (onder de lijn n)

elkaar overlappen.

De randen doen ook mee.



11.2 Herleiden en combineren van formules

019
☐⊗*

a Maak y vrij bij $3(x - 5) + 4(y - 3) = 5$.

b Toon aan dat de formule $A = 60 \cdot \frac{x+1}{3} \cdot \frac{x-2}{20}$ te herleiden is tot $A = x^2 - x - 2$.

c Toon aan dat de formule $D = 0,25\sqrt{F}$ te schrijven is als $F = 16D^2$.

Theorie A Formules herleiden en variabelen vrijmaken

Bij het herleiden van formules met breuken gebruik je

- $\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$
- delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk
- om breuken die niet gelijknamig zijn op te tellen, maak je ze eerst gelijknamig.

Gelijknamige breuken hebben dezelfde noemer.

Bij het herleiden van de formule $N = \frac{3}{2t} + \frac{1}{t+1}$ krijg je

$$N = \frac{3}{2t} + \frac{1}{t+1} = \frac{3(t+1)}{2t(t+1)} + \frac{2t}{2t(t+1)} = \frac{3t+3+2t}{2t(t+1)} = \frac{5t+3}{2t(t+1)}.$$

Bij het herleiden van formules met machten gebruik je de rekenregels voor machten.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (a^p)^q = a^{pq} \quad (ab)^p = a^p b^p$$

Deze regels gelden ook voor machten met gebroken en negatieve exponenten.

Voor machten met negatieve exponenten geldt $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

$$\frac{1}{2x^3} = \frac{1}{2}x^{-3}$$

Verder geldt $a^0 = 1$ voor $a \neq 0$.

Bij het herleiden van de formule $M = \frac{(0,2q^{1,3})^{-2,5}}{5,2q^2}$ krijg je

$$M = \frac{(0,2q^{1,3})^{-2,5}}{5,2q^2} = \frac{0,2^{-2,5} \cdot (q^{1,3})^{-2,5}}{5,2q^2} = \frac{0,2^{-2,5}}{5,2} \cdot \frac{q^{-3,25}}{q^2} \approx 10,75 \cdot q^{-5,25}.$$

herleiden (aan $(0,2q^{1,3})^{-2,5}$)
berekenen (aan $0,2^{-2,5}$)

Bij het herleiden van formules met wortels gebruik je de rekenregels voor wortels.

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \text{ en } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$$

Bij het herleiden van de formule $F = \sqrt{20n} + \sqrt{2n}$ krijg je

$$F = \sqrt{20} \cdot \sqrt{n} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{n} = 4,47... \sqrt{n} + 1,41... \sqrt{n} \approx 5,89 \sqrt{n}, \text{ dus } F = 5,89 \sqrt{n}.$$

Bij het vrijmaken van y bij de formule $G = 100 \cdot \sqrt{\frac{y}{15}}$ krijg je

$$100 \cdot \sqrt{\frac{y}{15}} = G \quad \text{Deel links en rechts door 100.}$$

$$\sqrt{\frac{y}{15}} = 0,01G \quad \text{Kwadrateer beide leden.}$$

$$\frac{y}{15} = (0,01G)^2 \quad \text{Vermenigvuldiging links en rechts met 15.}$$

$$y = 15 \cdot 0,01^2 \cdot G^2$$

$$y = 0,0015G^2$$

Bij het herleiden van gebroken formules en bij het vrijmaken van variabelen bij gebroken formules gebruik je de volgende regels.

- $\frac{A}{B} \cdot C = \frac{C}{B} \cdot A$
- $\frac{A}{B} = C$ geeft $B = \frac{A}{C}$
- $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $A \cdot D = B \cdot C$

Let op het verschil:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ geeft } A \cdot D = B \cdot C.$$

Zie het voorbeeld op de volgende bladzijde.

De formule $P = \frac{7x-6}{x}$ is te schrijven in de vorm $P = a + \frac{b}{x}$.

Je krijgt $P = \frac{7x-6}{x} = \frac{7x}{x} - \frac{6}{x} = 7 - \frac{6}{x}$, dus $a = 7$ en $b = -6$.

Het schrijven van $\frac{7x-6}{x}$ als $7 - \frac{6}{x}$ heet ook wel **uitdelen**.

Je hebt x uitgedeeld.

Je kunt de formule $N = \frac{0,6p^2 - 3p + 2}{4p}$ schrijven in de vorm $N = ap + b + \frac{c}{p}$.

$$\text{Je krijgt } N = \frac{0,6p^2 - 3p + 2}{4p} = \frac{0,6p^2}{4p} - \frac{3p}{4p} + \frac{2}{4p} = 0,15p - 0,75 + \frac{0,5}{p}.$$

Voorbeeld

- a** Herleid de formule $D = \frac{7-2q}{1,5} \cdot 21 + 18$ tot de vorm $D = aq + b$.
- b** Maak L vrij bij de formule $K = 8 - \frac{5}{L}$.
- c** Maak N vrij bij de formule $M = \frac{2N-3}{4}$.

Uitwerking

a $D = \frac{7-2q}{1,5} \cdot 21 + 18$ Gebruik $\frac{A}{B} \cdot C = \frac{C}{B} \cdot A$.

$$D = \frac{21}{1,5} \cdot (7-2q) + 18$$

$$D = 14(7-2q) + 18$$

$$D = 98 - 28q + 18$$

$$D = -28q + 116$$

b $K = 8 - \frac{5}{L}$ Zet de term met L apart.

$$\frac{5}{L} = 8 - K$$

Gebruik $\frac{A}{B} = C$ geeft $B = \frac{A}{C}$.

$$L = \frac{5}{8-K}$$

c $M = \frac{2N-3}{4}$

$$\frac{M}{1} = \frac{2N-3}{4}$$

Gebruik $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $A \cdot D = B \cdot C$.

$$4M = 2N - 3$$

$$2N - 3 = 4M$$

$$2N = 4M + 3$$

$$N = 2M + 1,5$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} = C \text{ oftewel } \frac{A}{B} &= \frac{C}{1} \\ BC &= A \\ B &= \frac{A}{C} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \frac{A}{B} = C \text{ geeft } B = \frac{A}{C}.$$



20 a Herleid de formule $K = 36 \cdot \frac{5-3x}{4,5} - 12$ tot de vorm $K = ax + b$.

b Gegeven is $K = 5 + \frac{8}{q}$.

Druk q uit in K .

c Maak y vrij bij $2 + \frac{y}{x+3} = 7$.

21
□ ⊗ *

- a Schrijf het rechterlid van de formule $M = \frac{5}{t} - 3t$ als één breuk.
- b Toon aan dat de formule $R = \frac{0,5q^2 - 2q + 5}{q} + q - 1$ te herleiden is tot $R = 1,5q - 3 + \frac{5}{q}$.
- c Herleid het rechterlid van de formule $T = \frac{6p}{p-2} \cdot (p+2) \cdot \frac{1}{3}$ tot één breuk.
- d Toon aan dat de formule $N = \frac{3t^{-1,12}}{2t} \cdot t^{3,15}$ te herleiden is tot $N = 1,5t^{1,03}$.

22
□ ⊗ *

- a Herleid de formule $P = 20 + \frac{3-2t}{5} \cdot 35$ tot de vorm $P = at + b$.
- b Maak x vrij bij $2(x-5) - 3(y+1) = 15$.
- c Schrijf de formule $N = \frac{423}{5 \cdot 1,3^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond g af op drie decimalen.
- d Maak L vrij bij $3(\frac{2}{3}L - 8) + 4K = 6(2 - L)$.

23
□ ⊗ *

- a Maak x vrij bij $\frac{y}{5} = \frac{4x+7}{4}$.
- b Herleid de formule $F = \frac{100}{6+5K}$ tot de vorm $K = \frac{a}{F} + b$.
- c Herleid $A \cdot \left(2 - \frac{x}{50}\right) = 1$ tot de vorm $x = a + \frac{b}{A}$.
- d De formule $C = 6x^{1,12} \cdot \frac{4x^{2,05}}{3x}$ is te herleiden tot de vorm $C = ax^b$.
Bereken a en b .

24
□ ⊗

- a Herleid de formule $M = \frac{1}{3} \cdot \frac{2t+1}{5} \cdot \frac{6}{t+1}$ tot $M = \frac{4t+2}{5t+5}$.
- b Schrijf het rechterlid van de formule $N = \frac{5}{t+1} - \frac{4}{t+2}$ als één breuk en herleid de teller.
- c Herleid de formule $P = \frac{(5,1x^{1,6})^4}{27x^{1,7}}$ tot de vorm $P = ax^b$. Rond a af op gehele.
- d Maak y vrij bij de formule $Q = 12,5\sqrt{\frac{y}{16}}$.

25*****

- a** Herleid de formule $K = 51 \cdot \frac{x^2 + 2x}{6} - 15$ tot de vorm $K = ax^2 + bx + c$.
- b** Herleid $8 - \frac{2y}{x+6} = x$ tot de vorm $y = ax^2 + bx + c$.
- c** De formule $F = \frac{2}{5} \cdot \frac{1-3q}{16} : \frac{1-2q}{10}$ is te herleiden tot de vorm $F = \frac{3q+a}{8q+b}$.
Bereken a en b .
- d** De formule $G = \frac{(25x^{1,1})^{1,5}}{x^{2,65}} - \frac{25}{x}$ is te herleiden tot de vorm $G = ax^b$.
Bereken a en b .

26**□ ⊗ ***

- a** Herleid de formule $P = \sqrt{30Q} - \sqrt{5Q}$ tot de vorm $P = a\sqrt{Q}$.
Rond a af op twee decimalen.
- b** Gegeven is de formule $N = \frac{5x}{3y-2}$.
Neem $N = 6$ en herleid de formule tot de vorm $x = ay + b$.
- c** Maak A vrij bij $\frac{4A}{3(2t-20)} = 16$.
- d** Herleid de formule $A = \frac{(2x^{1,4})^{-3}}{(3x^{1,4})^{-2}}$ tot de vorm $A = ax^b$.
- e** Schrijf de formule $N = \frac{3}{50 \cdot 0,6^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond g af op drie decimalen.

A27**□ ⊗ ***

- a** Gegeven is de formule $H = \frac{5pq}{12(6-r)}$.
Neem $H = 15$ en $q = 6$ en herleid de formule tot de vorm $p = ar + b$.
- b** Gegeven is de formule $L = t^2 \cdot \frac{5-x}{5y} + 6$.
Neem $L = 16$ en $t = 5$ en herleid de formule tot de vorm $y = ax + b$.
- c** Gegeven is $1,5A = 6 - 0,6\sqrt{B-1}$.
Druk B uit in A .
- d** Herleid de formule $F = \left(\frac{2}{p^{0,6}}\right)^3 - \frac{(4p^{1,6})^{1,5}}{(5p^{1,4})^3}$ tot de vorm $F = ap^b$.

A28**□ ⊗ ***

- De tijd die een persoon onbeschermd in de zon kan zitten zonder te verbranden is te berekenen met de formule $T = \frac{-2,1Z + 37}{18Z}$. Hierin is T de tijd in uren en Z de zonkracht.
- a** Bij zonkracht 8 kun je onbeschermd korter in de zon zitten dan bij zonkracht 6.
Hoeveel minuten scheelt het?
- b** De formule van T is te schrijven in de vorm $T = a + \frac{b}{Z}$.
Bereken a en b . Rond af op drie decimalen.

- a** Gegeven zijn de formules $A = 3,5P - 0,8Q + 4$ en $Q = 4P + 1$.
Combineer de formules tot de vorm $A = aP + b$.
- b** Gegeven zijn de formules $B = 2,8x^2 + 4,1xy + y^2$ en $y = x - 2$.
Schrijf de formule van B in de vorm $B = ax^2 + bx + c$.
- c** Gegeven zijn de formules $C = 3m + 4n + 5$ en $m = 2n - 1$.
Schrijf de formule van C in de vorm $C = am + b$.

Theorie B Formules combineren

Om de formules $D = 3p^2 + 4pq - 6q$ en $3p - 2q = 6$ te combineren tot de vorm $D = ap^2 + bp + c$ moet in de formule $D = 3p^2 + 4pq - 6q$ de variabele q worden vervangen door een formule waarbij q is uitgedrukt in p . Dus maak eerst q vrij bij $3p - 2q = 6$.

$$\left. \begin{array}{l} 3p - 2q = 6 \\ -2q = -3p + 6 \\ q = 1,5p - 3 \\ D = 3p^2 + 4pq - 6q \end{array} \right\} \begin{array}{l} D = 3p^2 + 4p \cdot (1,5p - 3) - 6 \cdot (1,5p - 3) \\ D = 3p^2 + 6p^2 - 12p - 9p + 18 \\ D = 9p^2 - 21p + 18 \end{array}$$

Je kunt de formules $P = 25x$ en $x = (\frac{1}{5})^t$ combineren tot de formule $P = 5^{2-t}$.

Combineren van de formules geeft $P = 25 \cdot (\frac{1}{5})^t$. Schrijf vervolgens zowel 25 als $(\frac{1}{5})^t$ als macht van 5.

Je krijgt $P = 25 \cdot (\frac{1}{5})^t = 5^2 \cdot (5^{-1})^t = 5^2 \cdot 5^{-t} = 5^{2-t}$.

Voorbeeld

In de Verenigde Staten van Amerika gebruikt men de eenheid kubieke feet (ft^3) om de hoeveelheid gebruikt drinkwater aan te geven.

Met de formule $K = 0,025x + 45$ bereken je de kosten in dollars bij het gebruik van $x \text{ ft}^3$ drinkwater.

Schrijf de formule in de vorm $K = ay + b$ met y de hoeveelheid gebruikt drinkwater in m^3 . Rond a af op twee decimalen. Gebruik dat $1 \text{ ft}^3 = 0,028 \text{ m}^3$.

Aanpak

Om van ft^3 naar m^3 te gaan, vermenigvuldig je met 0,028 dus $0,028x = y$.

Uitwerking

Er geldt $y = 0,028x$, dus $x = \frac{1}{0,028}y$.

$$K = 0,025 \cdot \frac{1}{0,028}y + 45 = \frac{0,025}{0,028}y + 45 = 0,892...y + 45$$

Dus $K = 0,89y + 45$.

$y = 0,028x$
Controle: $x = 1$ geeft
 $y = 0,028$ en dat klopt.

30
□ ⊗ *

Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

Schrijf de formule van $K = 0,89y + 45$ in de vorm $K = az + b$ met z de hoeveelheid gebruikt drinkwater in liter.



31
□ ⊗ *

a Gegeven zijn de formules $A = m^2 - 4mn + 8n$ en $5m - 2n = 10$.

Combineer de formules tot de vorm $A = am^2 + bm + c$.

b Gegeven zijn de formules $N = \frac{36}{p}$ en $p = (\frac{1}{6})^t$. Je kunt de formules combineren en de formule van N herleiden tot $N = 6^{t+2}$. Laat deze herleiding zien.

c Je kunt de formules $T = \frac{k}{k+3}$ en $k = 3^t - 3$ combineren tot de formule $T = 1 - 3^{1-t}$. Laat dat zien.

d Combineer de formules $F = 20 - \frac{5}{p}$ en $p = 3,12^{0,1x}$ tot de vorm $F = a + b \cdot g^x$. Rond g af op twee decimalen.

32
□ ⊗ *

In een formule $L = 0,04t^2 - t + 31$ is t de tijd in dagen en L de lengte in inch.

a Zet de formule om naar de vorm $L = aw^2 + bw + c$ met w de tijd in weken.

b Zet de formule om naar de vorm $l = pt^2 + qt + r$ met t de tijd in dagen en l de lengte in cm. Rond in het antwoord af op twee decimalen en gebruik dat $1 \text{ inch} = 2,54 \text{ cm}$.

Bij een onderzoek naar de toestand van het Great Barrier Reef voor de noordoostkust van Australië is een formule opgesteld van de temperatuur van het zeewater voor de kust. De formule is $F = 0,252m^2 - 3,06m + 84,2$. Hierin is F de temperatuur van het zeewater in graden Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) en m de tijd in maanden met $m = 0$ op 1 januari en $0 \leq m \leq 12$. Voor het omrekenen van graden Fahrenheit naar graden Celsius ($^{\circ}\text{C}$) gebruik je de



formule $C = \frac{F - 32}{1,8}$. Hierin is C de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en F de temperatuur in $^{\circ}\text{F}$.

Uit de formule $C = \frac{F - 32}{1,8}$ volgt $F = 1,8C + 32$.

- a** Toon dit aan.
- b** Bereken in graden Celsius hoeveel de temperatuur van het zeewater afneemt tussen 1 februari en 1 april. Rond af op één decimaal.
- c** Bereken hoeveel $^{\circ}\text{F}$ de minimale temperatuur van het zeewater is. Geef ook de minimale temperatuur in $^{\circ}\text{C}$. Rond af op één decimaal.

De formule $F = 0,252m^2 - 3,06m + 84,2$ is om te zetten naar de formule $C = 0,14m^2 - 1,7m + 29$. Hierin is C de temperatuur van het zeewater in $^{\circ}\text{C}$.

- d** Toon dit aan.

De formule $C = 0,14m^2 - 1,7m + 29$ is om te zetten naar de formule $C = 0,0075w^2 - 0,39w + 29$. Hierin is w de tijd in weken met $w = 0$ op 1 januari.

- e** Toon dit aan. Gebruik 1 maand $= \frac{52}{12}$ weken.

De formule $C = 0,0075w^2 - 0,39w + 29$ is om te zetten naar een formule van de vorm $C = ad^2 + bd + 29$. Hierin is d de tijd in dagen met $d = 0$ op 1 januari.

- f** Bereken a en b . Geef a en b in de wetenschappelijke notatie en rond af op twee decimalen.
- g** Bereken voor welke d de temperatuur van het zeewater minimaal is.

Mensen en mieren verschillen in de mate waarin ze rekening houden met elkaar als het druk wordt.

Bij mensen wordt de snelheid waarmee ze door een straat lopen

beschreven door de formule $V = 1,3 \left(1 - \frac{K}{5,2} \right)$. Hierin is V de snelheid

van voetgangers in m/s en K het aantal voetgangers per m^2 .

- a** Bereken de snelheid van voetgangers als er 0,8 mensen per m^2 in een winkelstraat lopen. Geef het antwoord in km/uur.

De snelheid van voetgangers heeft invloed op de doorstroming, dat wil zeggen hoeveel mensen er per seconde door een straat lopen. De formule voor de doorstroming is $D = V \cdot K$.

De formule van D is te herleiden tot $D = -0,25K^2 + 1,3K$.

- b** Laat deze herleiding zien en schets de grafiek van D .
c Bereken bij hoeveel mensen per m^2 de doorstroming maximaal is.

Om de doorstroming bij mieren te onderzoeken lieten wetenschappers ze over een kleine brug lopen om bij hun voedsel te komen. Van belang is hierbij hoe vaak de mieren tegen elkaar aan botsen. Als het aantal mieren per cm^2 groter wordt, neemt het aantal botsingen b toe. Dit verband wordt weergegeven door de formule $b = 0,61k$ met k het aantal mieren per cm^2 .

Bovendien geldt: hoe meer botsingen er zijn, hoe meer tijd de mieren nodig hebben om de brug over te steken. Hiervoor vonden de onderzoekers de formule $t = 0,95 + 0,24b$ met t de tijd in seconden. Uit het bovenstaande volgt dat bij benadering geldt dat $t = 0,95 + 0,15k$.

- d** Toon dit aan.

Onderzoekers vonden ook een positieve invloed van drukte op de snelheid van mieren. Als het drukker is, dan zijn de geursporen sterker waardoor mieren niet bezig hoeven te zijn met de richting waarin ze moeten lopen.

Beide effecten hebben de onderzoekers verwerkt in de formule

$v = \frac{1,6 + 0,4k \cdot 0,8^k}{t}$. In deze formule is v de snelheid in cm per seconde.

- e** Bereken de snelheid van de mieren als er 10 mieren per cm^2 zijn. Geef het antwoord in cm per minuut en rond af op gehelen.

De doorstroming bij de mieren wordt gegeven door de formule $d = v \cdot k$. Het aantal mieren per cm^2 kan niet meer zijn dan 18.

- f** Schets de grafiek van d .
g Onderzoek bij welk aantal mieren per cm^2 de doorstroming maximaal is.
h Bij drukte gedragen mieren zich socialer dan mensen. Hoe kun je dat aan de twee schetsen zien?

Terugblik

Formules herleiden en variabelen vrijmaken

De formule $A = \frac{5-4m}{1,8} \cdot 2,7 + 10m$ is te herleiden tot de vorm $A = am + b$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{5-4m}{1,8} \cdot 2,7 + 10m = \frac{2,7}{1,8} \cdot (5-4m) + 10m = 1,5(5-4m) + 10m \\ &= 7,5 - 6m + 10m = 4m + 7,5, \text{ dus } A = 4m + 7,5. \end{aligned}$$

De formule $B = \frac{(4y^{1,5})^{1,6}}{6y^3}$ is te herleiden tot de vorm $B = ay^b$.

$$B = \frac{(4y^{1,5})^{1,6}}{6y^3} = \frac{4^{1,6}(y^{1,5})^{1,6}}{6y^3} = \frac{4^{1,6}}{6} \cdot \frac{y^{2,4}}{y^3} \approx 1,53y^{-0,6}, \text{ dus } B = 1,53y^{-0,6}.$$

De formule $C = 16 \cdot (\frac{1}{2})^t$ is te herleiden tot $C = 2^{4-t}$.

$$C = 16 \cdot (\frac{1}{2})^t = 2^4 \cdot (2^{-1})^t = 2^4 \cdot 2^{-t} = 2^{4-t}, \text{ dus } C = 2^{4-t}.$$

Bij de formule $5(a-1) - \frac{1}{2}(4b-6) = 12$ kun je b vrijmaken: $5a - 5 - 2b + 3 = 12$
 $-2b = -5a + 14$
 $b = 2,5a - 7$

Bij de formule $4x = 5 - 2\sqrt{y+3}$ kun je y vrijmaken: $2\sqrt{y+3} = 5 - 4x$

$$\begin{aligned} \sqrt{y+3} &= 2,5 - 2x \\ y+3 &= (2,5 - 2x)^2 \\ y &= (2,5 - 2x)^2 - 3 \end{aligned}$$

Bij de formule $p = 3 + \frac{6}{q}$ kun je q vrijmaken: $\frac{6}{q} = p - 3$
 $q = \frac{6}{p-3}$

Formules combineren

De formules $F = \frac{2y^2 - 5y}{4x}$ en $y = 3x$ kun je combineren.

$$\text{Je krijgt } F = \frac{2(3x)^2 - 5 \cdot 3x}{4x} = \frac{2 \cdot 9x^2 - 15x}{4x} = \frac{18x^2 - 15x}{4x}.$$

Vervolgens kun je uitdelen. Je krijgt $F = \frac{18x^2 - 15x}{4x} = \frac{18x^2}{4x} - \frac{15x}{4x} = 4,5x - 3,75$.

In de formule $A = 0,05t^2 + 4t + 3$ is t de tijd in uren. Om deze formule om te zetten in een formule waarbij A wordt uitgedrukt in de tijd d in dagen gebruik je dat 1 dag = 24 uur, dus $t = 24d$.

$$\begin{aligned} \text{Je krijgt } A &= 0,05 \cdot (24d)^2 + 4 \cdot 24d + 3 = 28,8d^2 + 96d + 3, \text{ dus} \\ A &= 28,8d^2 + 96d + 3. \end{aligned}$$

11.3 Evenredigheden

035
□ ⊗ *

Bekijk de volgende situaties.

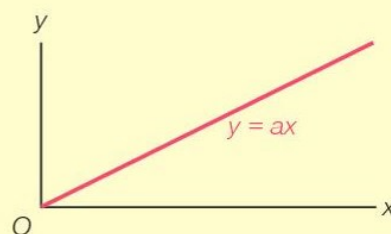
- I Na afloop van een festival verdienen x schoonmakers allemaal hetzelfde bedrag per uur. Samen verdienen ze y euro.
- II Na afloop van een festival maken x personen het feestterrein in y minuten schoon.
 - a Neem aan dat het aantal personen x vier keer zo groot is als aanvankelijk werd aangenomen. Welk effect heeft dat in beide situaties op y ?
 - b In welke situatie is sprake van evenredige grootheden?

Theorie A Omgekeerd evenredig

Je kent het begrip (recht) evenredig al.

y is (recht) evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
- De bijbehorende tabel is een verhoudingstabel.
- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.



Martijn maakt een fietstocht van 60 km. Bij een snelheid van

$\times 3$ $\left(\begin{array}{l} \times 2 \\ \times 3 \end{array} \right)$ 10 km/uur doet hij er 6 uur over $\left(\begin{array}{l} :2 \\ :3 \end{array} \right)$ $\times 3$
 20 km/uur doet hij er 3 uur over
 30 km/uur doet hij er 2 uur over

Maak je de snelheid k maal zo groot, dan moet je de tijd door k delen. We zeggen dat de snelheid v **omgekeerd evenredig** is met de tijd t . In de volgende tabel kun je nagaan dat het product $v \cdot t$ telkens 60 is.

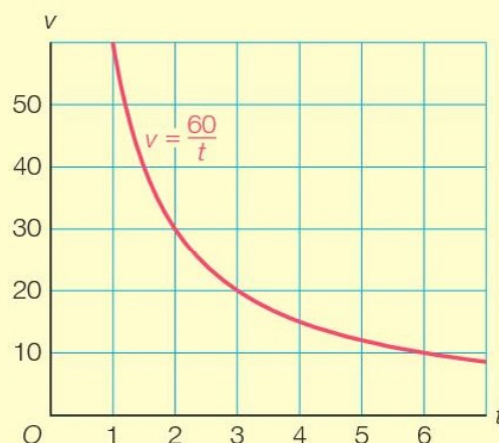
t	1	2	3	4	5	6
v	60	30	20	15	12	10

In figuur 11.14 is de grafiek getekend. De grafiek is een (deel van een) hyperbool.

Tussen v en t bestaat het **omgekeerd evenredig verband** $v \cdot t = 60$.

Je kunt dit verband ook beschrijven met de

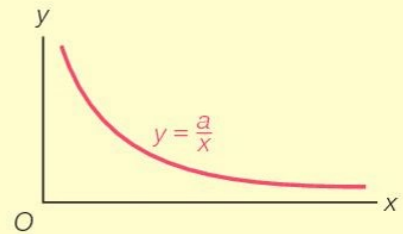
formule $v = \frac{60}{t}$ of met de formule $t = \frac{60}{v}$.



figuur 11.14

y is omgekeerd evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y door hetzelfde getal delen.
- Het product $x \cdot y$ is constant, dus $x \cdot y = a$
oftewel $y = \frac{a}{x}$.
- De grafiek is een hyperbool.



Voorbeeld

Volgens een bedrijfseconoom is het aantal tandenborstels q dat een bedrijf dagelijks verkoopt omgekeerd evenredig met de prijs p in euro's. Bij een prijs van €3,25 worden dagelijks 800 tandenborstels verkocht. Stel de formule op van q bij een prijs van p euro.

Uitwerking

q is omgekeerd evenredig met p , dus $q = \frac{a}{p}$.

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{a}{p} \\ p = 3,25 \text{ en } q = 800 \end{array} \right\} \frac{a}{3,25} = 800$$
$$a = 800 \cdot 3,25 = 2600$$

Vermenigvuldig links en rechts met 3,25.

$$\text{Dus } q = \frac{2600}{p}.$$

36 Zie het voorbeeld.



a In de theorie staat dat er drie manieren zijn om een formule te beschrijven die bij een omgekeerd evenredig verband hoort.

Schrijf de formule $q = \frac{2600}{p}$ op de andere twee manieren.

b Bereken de dagelijkse verkoop bij een prijs van €2,70.

c Bereken welke prijs bij een dagelijkse verkoop van 550 stuks hoort.

37 In welke van de volgende situaties is sprake van een recht evenredig verband en in welke van een omgekeerd evenredig verband?



a Het aantal pakken melk dat je koopt en de prijs van het totaal.

b Het aantal even grote volkstuintjes op een complex van 1 ha en de grootte van zo'n volkstuintje.

c Het aantal mensen dat van één noodrantsoen moet leven en de hoeveelheid voedsel per persoon.

d Het aantal producten dat een machine aflevert en de tijd die de machine draait.

e Het aantal auto's op een veerboot en de beschikbare plaats per auto.

- 38** Volgens een onderzoeksbureau is het aantal per maand verkochte vulpennen van het merk Waterman omgekeerd evenredig met de prijs p in euro's. Bij een prijs van € 40,50 is de maandverkoop 6480 vulpennen.
- a** Stel de formule op van de maandelijkse verkoop q bij een prijs van p euro.
 - b** Bereken de maandelijkse verkoop bij een prijs van € 25,-.
 - c** Bereken welke prijs bij een maandelijkse verkoop van 5600 vulpennen hoort.

- 39** Onderzoek in de Stille Oceaan heeft uitgewezen dat de watertemperatuur T in °C omgekeerd evenredig is met de diepte d in km. Dit verband blijkt alleen te gelden voor diepten groter dan 500 meter. Op een diepte van 2500 meter is de watertemperatuur 1,6 °C.
- a** Stel de formule op van de temperatuur T op een diepte van d km.
 - b** Hoeveel is de watertemperatuur op 4835 meter diepte?
 - c** Op welke diepte is de watertemperatuur 1,4 °C?



- 40** Het tarief bij de onroerende zaakbelasting (OZB) is evenredig met de vastgestelde waarde van de woning. In deze opgave bekijken we de OZB voor eigenaren van woningen in de gemeente Rozendam. De familie Duin heeft een woning van 360 000 euro en betaalt hiervoor aan OZB 450 euro per jaar.
- a** Stel de formule op van het jaarlijkse bedrag B aan OZB in euro's bij een woning met een waarde van W euro.
 - b** De familie Klapwijk betaalt per jaar 525 euro aan OZB. Bereken de waarde van hun woning.
 - c** De familie Vonk heeft een woning met een waarde van 820 000 euro, dat is 0,4% van de totale waarde van alle woningen in Rozendam. Bereken de totale jaarlijkse inkomsten aan OZB voor de gemeente Rozendam.

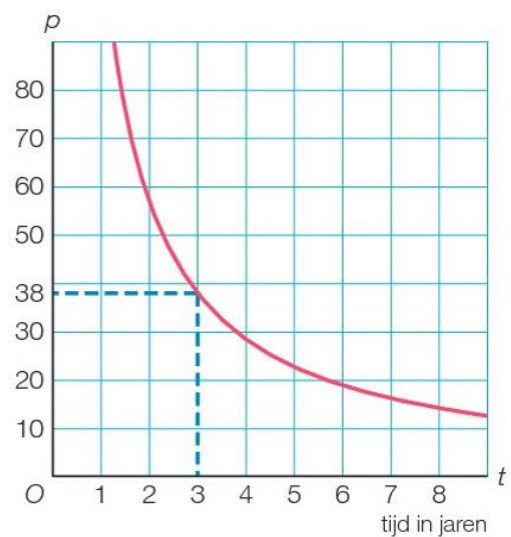
- 41** Een bungalowpark heeft regelmatig te kampen met wateroverlast. De eigenaars van de bungalows besluiten drainage aan te leggen. Er worden drainagebuizen aangebracht die voor de afvoer van het water zorgen. De totale kosten van de aanleg zijn 288 000 euro. De oppervlakte van het vakantiepark is 120 000 m². Afgesproken wordt dat de parkbewoners samen de totale aanlegkosten opbrengen. Het te betalen bedrag aan aanlegkosten is recht evenredig met de oppervlakte van de kavel. Voor een kavel zijn de aanlegkosten 1536 euro. Bereken de oppervlakte van die kavel.

A42


Enkele jaren geleden vond in Chedabucto Bay bij Canada een olieramp plaats, waarbij veel olie op de stranden terecht kwam. Natuurlijke processen zorgen voor afbraak van de olie.

Onderzoek heeft uitgewezen dat het percentage p van de nog aanwezige olie omgekeerd evenredig is met de verstreken tijd t in jaren. Hierbij is $t > 1$. In de grafiek van figuur 11.15 vind je verdere informatie.

- Stel de formule op van het percentage p van de olie dat na t jaar nog aanwezig is.
- Hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid olie is na 5,5 jaar nog aanwezig?
- Hoelang duurt het tot 95% van de olie is verdwenen?



figuur 11.15

A43


Gegeven is de tabel hiernaast.

Onderzoek welk verband er bestaat tussen y_1 en x , tussen y_2 en x en tussen y_3 en x en geef telkens de bijbehorende formule.

x	3	5	9	12	15
y_1	10,2	17	30,6	40,8	51
y_2	150	90	50	37,5	30
y_3	17	15	11	8	5

A44


Een apotheek moet vaak oplossingen leveren van een heel nauwkeurige concentratie. Bovendien moet zo'n oplossing geleverd kunnen worden in elk gewenst volume. Het is voor de apotheek niet praktisch allerlei concentraties in voorraad te hebben. Vaak is slechts één bepaalde concentratie in huis.

Apotheek West heeft alcohol van 95% in voorraad, dat wil zeggen 95% van de oplossing is alcohol en 5% is water.

- De apotheker vult 1 liter (= 1000 mL) alcohol van 95% met water aan tot 3 liter.

Toon aan dat de concentratie alcohol van de oplossing in dat geval 31,7% is.

We gaan bij de vragen b, c en d telkens uit van 1000 mL alcohol van 95%. De apotheker vult dit aan tot V mL oplossing.

- Bereken de concentratie c in procenten bij aanvullen tot 2000 mL.
- De concentratie c in procenten en het volume V in mL zijn omgekeerd evenredig. Controleer dat met de antwoorden op de vragen a en b.
- Een klant heeft alcohol van 70% nodig.
Licht toe hoe de apotheker deze oplossing kan verkrijgen.

De apotheker heeft een waterstofperoxide-oplossing in voorraad van 3%. Een klant vraagt 500 mL waterstofperoxide met een sterkte van 0,2%.

- Hoeveel mL van de voorradige oplossing moet worden aangevuld met water?

A45

Bij grote etappekoersen in het wielrennen maakt de wedstrijdleiding vaak enkele tijdschema's voor een etappe. Je hebt dan drie schema's: een langzaam schema, een snel schema en een schema daartussenin. Tijdens de koers houdt men in de gaten op welk schema gereden wordt.

Bij een etappe in de Tour de France wordt gestart om 12:15 uur. Het langzame schema geeft aan dat bij een gemiddelde snelheid van 42 km/uur de finish om 17:30 uur is. De finish blijkt om 16:55 uur te zijn.

Met welke gemiddelde snelheid is in deze etappe gereden?

**E46**

Pascal van Norden (Gouda, 5 september 1972) is een Nederlandse ultraloper. Hij is gespecialiseerd in lange afstanden. In 2017 prolongeerde hij in Winschoten zijn titel Nederlands kampioen 100 km. Hij legde deze afstand af in 6 uur, 55 minuten en 10 seconden. Daarmee was zijn gemiddelde snelheid (afgerond op drie decimalen) gelijk aan 14,452 km/uur.

We vragen ons in deze opgave af hoe gelijkmatig Pascal tijdens deze race heeft gelopen. Als hij steeds even hard liep, moet er sprake zijn van een evenredig verband tussen de afgelegde afstand en de tijd.

In de tabel zie je de tussentijden na telkens 10 km.

6 uur, 55 minuten en 10 seconden is

$$6 + \frac{55}{60} + \frac{10}{3600} = 6,919... \text{ uur.}$$

100 km in 6,919... uur, dus gemiddelde snelheid is

$$\frac{100}{6,919...} \approx 14,452 \text{ km/uur.}$$

TUSSENTIJDEN BIJ DE KAMPIOENSRACE VAN PASCAL VAN NORDEN, 2017

afstand in km	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
tijd	40:25	1:21:08	2:01:36	2:41:42	3:22:03	4:02:50	4:44:26	5:27:44	6:11:35	6:55:10

Je kunt berekenen dat zijn gemiddelde snelheid tijdens de eerste 10 km gelijk was aan 14,845 km/uur.

- a** Licht dit toe met een berekening en bereken de gemiddelde snelheid in km/uur over de eerste 20 km en de eerste 30 km. Rond af op drie decimalen.

Je ziet dat de berekende gemiddelde snelheden niet precies aan elkaar gelijk zijn. Het gemiddelde van de drie in vraag a berekende snelheden is 14,813 km/uur. We nemen aan dat er een evenredig verband bestaat tussen de afgelegde afstand en de tijd als de gemiddelde snelheid niet meer dan 1% afwijkt van deze 14,813 km/uur. Dat betekent dat er een evenredig verband bestaat als de gemiddelde snelheid tussen 14,665 en 14,961 km/uur ligt.

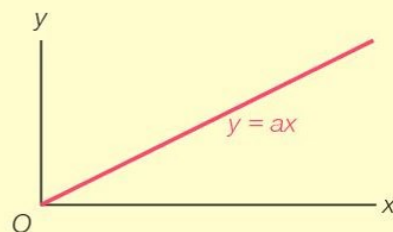
- b** Bereken tot welke afstand het evenredige verband opgaat.

Terugblik

Evenredigheden

y is (recht) evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
- De bijbehorende tabel is een verhoudingstabel.
- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.

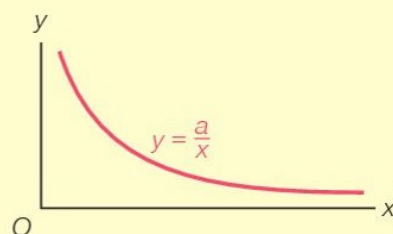


y is omgekeerd evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y door hetzelfde getal delen.
- Het product $x \cdot y$ is constant, dus $x \cdot y = a$ oftewel

$$y = \frac{a}{x}.$$

- De grafiek is een hyperbool.



De bereidingstijd van vlees in een magnetron is omgekeerd evenredig met het ingestelde vermogen. Bij een vermogen V van 800 watt is de bereidingstijd T precies 4 minuten.

De formule van T krijg je als volgt.

$$\text{omgekeerd evenredig, dus } T = \frac{a}{V} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{800} = 4 \\ a = 4 \cdot 800 = 3200 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } T = \frac{3200}{V}.$$

11.4 Redeneren met formules

O47
□ ⊗ *

Gegeven zijn de formules $y_1 = \frac{4}{x}$, $y_2 = \frac{4}{x} + 5$ en $y_3 = \frac{4}{x} - 8$.

Wat gebeurt er met y_1 als x heel groot wordt? En wat kun je dan zeggen van y_2 ? En wat van y_3 ?

Theorie A Formules van de vorm $y = \frac{a}{x} + b$

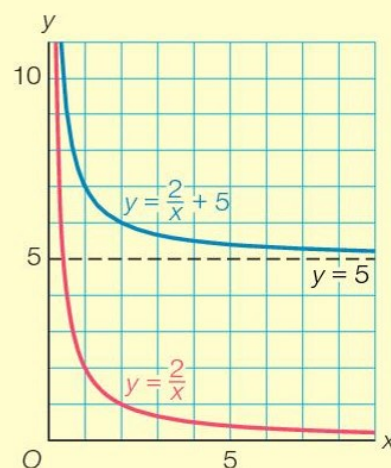
In figuur 11.16 is de grafiek van $y = \frac{2}{x}$ getekend voor $x > 0$. Als x heel groot wordt, dan nadert y tot 0. De grafiek komt rechts steeds dichterbij de x -as, dus de grenswaarde is 0.

Wordt x heel groot bij de formule $y = \frac{2}{x} + 5$, dan wordt $y \approx 0 + 5 = 5$, dus de grenswaarde is 5.

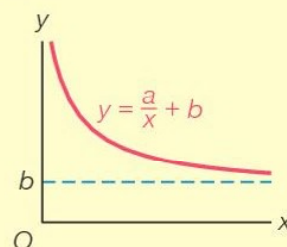
Bij een omgekeerd evenredig verband is de grenswaarde 0.

Bij het verband $y = \frac{a}{x} + b$ is de grenswaarde b .

De grafiek van $y = \frac{a}{x} + b$ met $a > 0$ is voor $x > 0$ dalend.



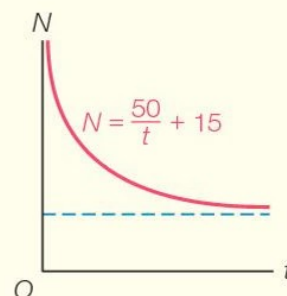
figuur 11.16



Voorbeeld

Hiernaast zie je een schets van de grafiek van $N = \frac{50}{t} + 15$ met $t > 0$.

- Bereken wat de grenswaarde is.
- Bereken hoe uit de formule van N volgt dat de grafiek dalend is.
- Vanaf welke t is N kleiner dan 18? Rond af op één decimaal.



figuur 11.17

Uitwerking

- Als t heel groot wordt, nadert $\frac{50}{t}$ tot 0 en dan wordt $\frac{50}{t} + 15 \approx 15$.

Dus de grenswaarde is 15.

- Als t toeneemt, dan neemt $\frac{50}{t}$ af. Dus ook $\frac{50}{t} + 15$ neemt af.

De grafiek van N is dus dalend.

- Voer in $y_1 = \frac{50}{x} + 15$ en $y_2 = 18$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 16,7$, dus vanaf $t \approx 16,7$ is N kleiner dan 18.

48
□ ⊗ *

Gegeven is de formule $A = \frac{150}{s} + 20$ met $s > 0$.

- a Beredeneer wat de grenswaarde is.
- b Beredeneer hoe uit de formule van A volgt dat de grafiek dalend is.
- c Vanaf welke s is A kleiner dan 24?
- d Met hoeveel procent neemt A af als s toeneemt van 20 tot 25?

49
□ ⊗ *

Bij de productie van koffiezetapparaten hangen de fabricagekosten K in euro's per apparaat af van het aantal apparaten q dat per dag gemaakt wordt. Er geldt $K = 30 + \frac{4000}{q}$.

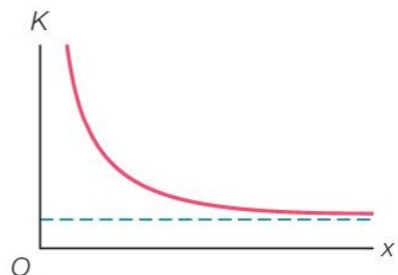
- a Beredeneer hoe uit de formule van K volgt dat de grafiek dalend is. Licht toe dat dit met de praktijk overeenkomt.
- b De productie wordt verhoogd van 500 tot 600 stuks per dag. Met hoeveel procent dalen de fabricagekosten per apparaat?
- c Beredeneer wat de grenswaarde is. Welke praktische betekenis heeft de grenswaarde?
- d De fabrikant streeft naar een kostprijs per apparaat van niet meer dan 45 euro. Hoeveel moet de productie per dag dan zijn?
- e Kan de kostprijs K minder dan € 30,50 worden? Licht toe.

A50
□ ⊗ *

Het bedrijf Klienstra houdt zich bezig met het schoonhouden van grote gebouwen, zoals kantoren en scholen. Het tarief hangt af van de vloeroppervlakte van het schoon te maken object. Voor oppervlakten tot 10000 m² kun je het tarief berekenen met de formule

$K = 27,5 + \frac{15}{x}$. Hierin is K het bedrag in euro's per m² dat

per jaar betaald moet worden en x de oppervlakte in 1000 m².



- a Klienstra maakt het kantoorgebouw van de firma Z&N schoon. Hiervan is de oppervlakte 2000 m². Hoeveel moet Z&N per jaar aan schoonmaakkosten betalen?
- b Een schoolgebouw bestaat uit drie verdiepingen, elk van 20 bij 40 meter. Bereken het bedrag dat de school per jaar bij Klienstra aan schoonmaakkosten kwijt is.
- c Een bedrijf wil voor het schoonmaken niet meer dan € 29,50 per m² per jaar betalen. Wat weet je van de oppervlakte van dit bedrijf als ze met Klienstra in zee gaan?
- d De grafiek van K is dalend. Kun je zeggen dat de totale schoonmaakkosten per jaar afnemen als je een steeds grotere oppervlakte laat schoonmaken? Licht toe.
- e De totale jaarlijkse schoonmaakkosten J zijn te schrijven in de vorm $J = ax + b$. Bereken a en b .

In de volgende formules is $x > 0$.

Wat weet je van y als x toeneemt? Kies uit de antwoorden 'y neemt toe' en 'y neemt af'.

a $y = 1 - 0,9^x$ c $y = 10 + \frac{1}{x^2}$

b $y = \frac{20}{2x + 1}$ d $y = \frac{3\sqrt{x+1}}{10}$

Theorie B Redeneren met formules

Je weet al hoe je bij groeiformules als $N = 500(1 - 0,82^t)$ en

$N = \frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t}$ beredeneert of de bijbehorende grafiek stijgend of dalend is. Je gebruikt

- als t toeneemt, dan neemt g^t toe als $g > 1$
- als t toeneemt, dan neemt g^t af als $0 < g < 1$.

Ook kun je door redeneren de grenswaarde vinden.

Bij $N = 500(1 - 0,82^t)$ gaat dat als volgt.

1. grenswaarde

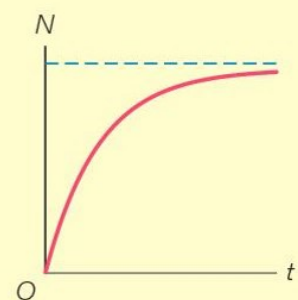
Als t heel groot wordt, dan nadert $0,82^t$ tot 0, dus dan wordt $1 - 0,82^t \approx 1$, dus dan wordt $500(1 - 0,82^t) \approx 500$.

Dus de grenswaarde is 500.

2. stijgen of dalen

Als t toeneemt, dan neemt $0,82^t$ af, dus dan neemt $1 - 0,82^t$ toe, dus dan neemt $500(1 - 0,82^t)$ ook toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.



figuur 11.18
 $N = 500(1 - 0,82^t)$

Bij $N = \frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t}$ redeneer je als volgt.

1. grenswaarde

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,75^t$ tot 0 en dan wordt $20 \cdot 0,75^t \approx 0$ en $3 + 20 \cdot 0,75^t \approx 3$. Dus dan wordt

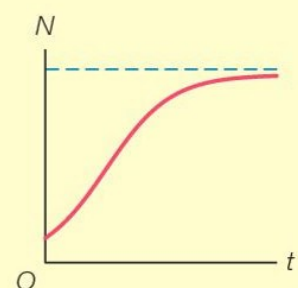
$$\frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t} \approx \frac{2400}{3} = 800.$$

Dus de grenswaarde is 800.

2. stijgen of dalen

Als t toeneemt, dan neemt $0,75^t$ af, dus dan neemt $20 \cdot 0,75^t$ ook af, dus ook $3 + 20 \cdot 0,75^t$ neemt af. Daarom neemt

$$\frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t} \text{ toe en is de grafiek van } N \text{ stijgend.}$$



figuur 11.19
 $N = \frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t}$

Ook bij formules als $y = 100 - \frac{20}{3x+1}$, $y = \frac{10}{x^2+1} - 5$ en $y = \frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$

kun je beredeneren of de grafiek van y stijgend of dalend is.

Daarbij nemen we steeds $x > 0$, tenzij anders vermeld.

Bij dit soort redeneringen gebruiken we

- als x toeneemt, dan neemt ax toe als $a > 0$
- als x toeneemt, dan neemt ax af als $a < 0$
- als x toeneemt, dan neemt x^n toe als $n > 0$
- als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe.

Voorbeeld

Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort.

a $y = 100 - \frac{20}{3x+1}$

b $y = \frac{10}{x^2+1} - 5$

c $y = \frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$

Uitwerking

a Als x toeneemt, dan neemt $3x$ toe, dus $3x+1$ neemt toe, dus

$\frac{20}{3x+1}$ neemt af en $100 - \frac{20}{3x+1}$ neemt toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

b Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe, dus dan neemt x^2+1 toe en

$\frac{10}{x^2+1}$ neemt af, dus dan neemt $\frac{10}{x^2+1} - 5$ ook af.

Dus de grafiek van y is dalend.

c Als x toeneemt, dan neemt $0,8^x$ af en $50 \cdot 0,8^x$ neemt af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe.

Van $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ neemt af.

Dus de grafiek van y is dalend.



a In de theorie staat
'als x toeneemt, dan neemt x^n toe als $n > 0$.'

Gebruik dit en de rekenregel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ om te beredeneren
dat de grafiek van $y = 5x^{-3}$ dalend is.

b Zie het voorbeeld.

Bij elk van de gegeven formules hoort een grafiek met een
grenswaarde.

Beredeneer bij elk van de formules wat de grenswaarde is.

Ga in de opgaven steeds
uit van $x > 0$, tenzij
anders vermeld.

53 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.

a $y = 250 - \frac{100}{x}$

b $y = \frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2 + 1}$

c $N = 1250(2 - 3 \cdot 0,75^t)$

54 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.

a $y = 25 + \frac{12}{x^2}$

b $y = 40 - \frac{80}{2 + \sqrt{x}}$

c $N = \frac{18000}{250 + 333 \cdot 0,65^t}$

A55 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort.

a $A = x \left(3 + \frac{x}{22} \right)$

b $B = \frac{x^{2,3} + 1}{20 \cdot 0,3^x}$

A56 Uit de lengte L van de remweg van een auto kan met de vuistregel

$L = \frac{v^2}{25f}$ de snelheid worden bepaald waarmee gereden is. Hierin is L in

meters en is v de snelheid in km/uur. Verder is f een positief getal dat afhangt van het wegdek, de weersomstandigheden en de autobanden.

- a** Hoe volgt uit de formule dat bij een hogere snelheid en een vaste waarde van f een langere remweg hoort?
- b** Beredeneer met de formule dat bij meer grip een grotere waarde van f hoort.
- c** Schrijf de formule van L in de vorm $L = a \cdot v^2$ in het geval $f = 8$.
- d** In het geval dat de auto met een snelheid van 60 km/uur rijdt, is de formule van L te schrijven in de vorm $L = \frac{b}{f}$.

Bereken b .

- e** Druk voor remwegen van 38 meter f uit in v .
- f** Met hoeveel procent neemt de lengte van de remweg toe bij een 20% hogere snelheid?

A57
📌

Het is van belang dat de schildpad voor ze aan haar winterslaap begint in een goede conditie verkeert, want anders is de kans groot dat ze door haar reserves heen raakt en sterft.

De conditie van een schildpad is te berekenen met de Jackson ratio $J = \frac{g}{l^3}$.

Hierin is g het gewicht van de schildpad in gram en l de lengte in cm. Schildpadden van de soort *T. hermanni* met een J van rond de 0,21 verkeren in een goede conditie. Maar is $J < 0,17$, dan is de conditie onvoldoende.

Van twee *T. hermanni* schildpadden die hetzelfde gewicht hebben, is bekend dat de grootste een Jackson ratio van 0,17 heeft.

Beredeneer met de formule of de kleine schildpad in voldoende conditie verkeert.



A58
*

Een van de oudste methoden om de gevoelstemperatuur te berekenen is de methode van Siple en Passel.

De formule die hierbij hoort is

$$G = 33 + (T - 33) \cdot W \text{ met } W = 0,474 + 0,454\sqrt{w} \cdot (1 - 0,1\sqrt{w}).$$

Hierin is G de gevoelstemperatuur in $^{\circ}\text{C}$, T de luchttemperatuur in $^{\circ}\text{C}$ op 1,50 meter hoogte en w de windsnelheid in m/s op 10 meter hoogte. De formule geldt voor windsnelheden tussen 0 en 25 m/s.

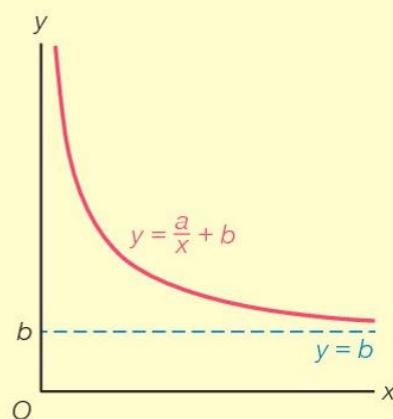
- Uit de formule van G volgt dat er een luchttemperatuur is die bij elke windsnelheid dezelfde gevoelstemperatuur oplevert.
Toon dit aan.
- Schets de grafiek van W voor w tussen 0 en 25. Welke soort van stijgen of dalen heeft de grafiek van W ?
- Beredeneer met de schets van vraag b en de formule van G dat bij luchttemperaturen rondom het vriespunt de gevoelstemperatuur afneemt als de windsnelheid toeneemt.

Terugblik

Formules van de vorm $y = \frac{a}{x} + b$

Wordt x heel groot bij de formule $y = \frac{a}{x} + b$, dan nadert $\frac{a}{x}$ tot 0, dus dan wordt $y = \frac{a}{x} + b \approx b$, dus de grenswaarde is b .

De grafiek komt rechts steeds dichterbij de lijn $y = b$. In de figuur hiernaast is $a > 0$, dus de grafiek is dalend.



Bij de formule $N = \frac{8}{t} + 3,75$ met $t > 0$ bereken je als volgt dat de grafiek dalend is.

Als t toeneemt, dan neemt $\frac{8}{t}$ af, dus dan neemt $\frac{8}{t} + 3,75$ ook af.

Dus de grafiek van N is dalend.

Je berekent als volgt wat de grenswaarde van N is.

Als t heel groot wordt, dan nadert $\frac{8}{t}$ tot 0, dus dan wordt $\frac{8}{t} + 3,75 \approx 3,75$.

Dus de grenswaarde is 3,75.

Je kunt als volgt berekenen dat N niet gelijk kan zijn aan 3,7. De grafiek is dalend en de grenswaarde is 3,75, dus N is altijd groter dan 3,75. Dus N kan niet gelijk zijn aan 3,7.

Redeneren met formules

Bij de formule $N = \frac{1200}{4 + 15 \cdot 0,72^t}$ bereken je als volgt dat de grafiek van N stijgend is.

Als t toeneemt, dan neemt $0,72^t$ af, dus dan neemt $15 \cdot 0,72^t$ ook af, dus ook $4 + 15 \cdot 0,72^t$ neemt af. Daarom neemt $\frac{1200}{4 + 15 \cdot 0,72^t}$ toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

Je kunt berekenen dat bij de formule $y = 200 - \frac{50}{x\sqrt{x}}$ een stijgende grafiek hoort. Dat gaat als volgt.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $x\sqrt{x}$ ook toe, dus dan neemt $\frac{50}{x\sqrt{x}}$ af, dus dan neemt $200 - \frac{50}{x\sqrt{x}}$ toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

11.5 Wiskundige modellen

059
☐◎*

In een krantenartikel staat dat het aantal wilde vogels in Noord-Amerika in 50 jaar met 3 miljard is afgenomen. In 1970 waren er nog 10 miljard wilde vogels.

a Ga uit van een lineaire afname.

Stel de formule op van het aantal wilde vogels in Noord-Amerika. Neem het aantal N in miljarden en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1970.

b Ga uit van een exponentiële afname.

Stel de formule op van het aantal wilde vogels in Noord-Amerika. Neem het aantal N in miljarden en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1970. Rond de groeifactor af op drie decimalen.



Van de Baltimoretroepiaal is 2 op de 5 in 50 jaar verdwenen.

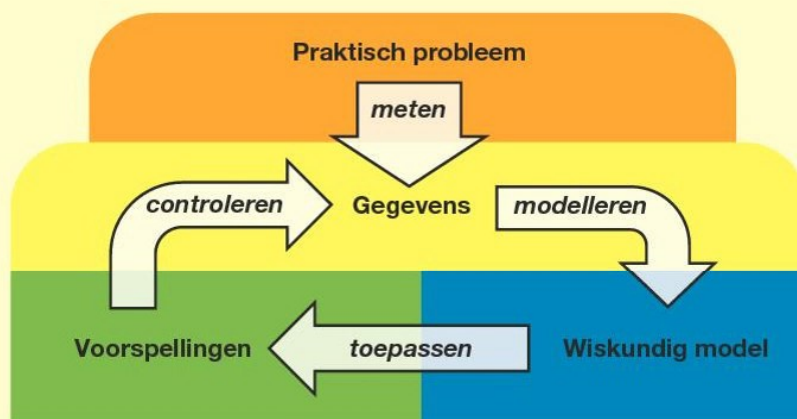
Theorie A Modelvorming

In opgave 59 heb je twee formules opgesteld bij de vogelstand in Noord-Amerika. Omdat in het krantenartikel maar weinig gegevens staan, kun je niet weten welke formule juist is. En misschien is geen van beide formules juist.

Wanneer je de vogelstand beschrijft met wiskunde, is het resultaat een **wiskundig model**.

Heb je de beschikking over meer gegevens, dan kun je controleren welke van de opgestelde modellen het beste voldoet. Wellicht is het nodig om een ander wiskundig model te gebruiken dan lineaire of exponentiële groei.

Het proces van opstellen van een wiskundig model en het aanpassen hiervan heet **modelvorming**. Zie het schema hieronder.



figuur 11.20

Voorbeeld

De meeste medicijnen zijn beperkt houdbaar, omdat na verloop van tijd de hoeveelheid werkzame stof in het medicijn minder wordt. Bij het medicijn Prox wordt de hoeveelheid werkzame stof W uitgedrukt in een getal tussen 0 en 100.

Bij de productie is de hoeveelheid werkzame stof 100 en bij een bewaartemperatuur van 20°C is na 10 dagen deze hoeveelheid nog 84.

Neem aan dat er een lineair verband is tussen W en de tijd t in dagen.

a Stel de formule op van W .

Het blijkt dat 26 dagen na de productie de hoeveelheid werkzame stof 64 is.

b Toon aan dat dit niet in overeenstemming is met het lineaire model.

c Laat zien dat er wel een exponentieel model is dat past bij deze gegevens.

Uitwerking

$$\begin{aligned} \text{a } W = at + 100 \\ t = 10 \text{ en } W = 84 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} W = at + 100 \\ t = 10 \text{ en } W = 84 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} 10a + 100 &= 84 \\ 10a &= -16 \\ a &= -1,6 \end{aligned}$$

Dus $W = -1,6t + 100$.

b $t = 26$ invullen in de formule geeft $W = -1,6 \cdot 26 + 100 = 58,4$ en dit is niet gelijk aan 64, dus niet in overeenstemming met het lineaire model.

$$\text{c } g_{10 \text{ dagen}} = \frac{84}{100} = 0,84, \text{ dus } g_{\text{dag}} = 0,84^{\frac{1}{10}} \approx 0,983$$

$$g_{26 \text{ dagen}} = \frac{64}{100} = 0,64, \text{ dus } g_{\text{dag}} = 0,64^{\frac{1}{26}} \approx 0,983$$

De groeifactoren per dag zijn bij benadering aan elkaar gelijk en daarom past een exponentieel model bij deze gegevens.



Zie het voorbeeld. Het blijkt dat de hoeveelheid werkzame stof 52 dagen na de productie nog 41 is.

a Onderzoek of dit overeenkomt met het exponentiële model.

b Na hoeveel dagen is volgens het exponentiële model de hoeveelheid werkzame stof voor het eerst minder dan 25?

Bij bewaren in de koelkast bij 4°C is Prox langer houdbaar. In de tabel hiernaast zie je dat bij bewaren in de koelkast de hoeveelheid werkzame stof na 16 dagen 86 is.

c Laat zien dat bij de tabel geen lineair model hoort.

De producent heeft twee modellen opgesteld die de hoeveelheid werkzame stof bij bewaren bij 4°C beschrijven. Deze modellen zijn $W_1 = 100 \cdot 0,989^t$ en $W_2 = 100 - 0,6t - 1,2\sqrt{t}$.

d Onderzoek welke van deze twee modellen het beste past bij de gegevens in de tabel.

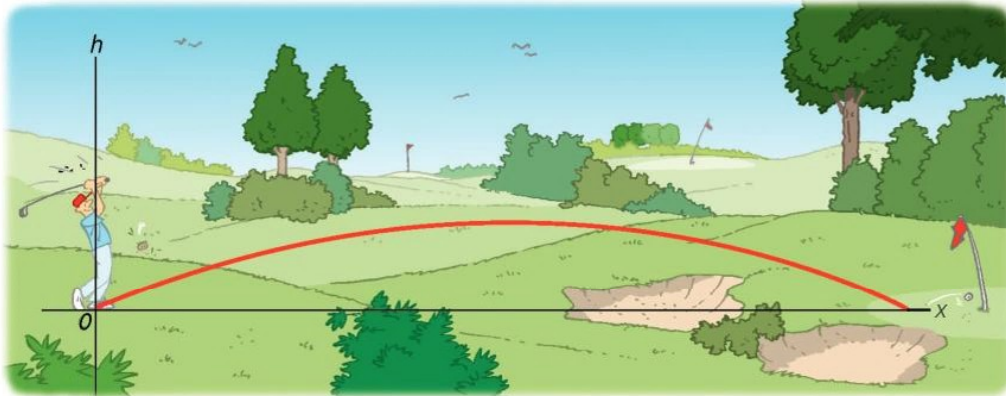
HOUDBAARHEID PROX BIJ 4°C

t in dagen	0	8	16	52
W	100	92	86	60

61
□ ⊙ *

Bij het bestuderen van de baan van een golfbal heeft men de tabel hiernaast opgesteld. Hierin zijn x en h in meters. Zie ook de figuur hieronder.

x	0	10	30	55	60
h	0	3,5	7,5	7,0	6,0



figuur 11.21

Men neemt aan dat de baan de vorm van een parabool heeft. Men gaat uit van het model $h = -0,005x^2 + 0,4x$.

- Controleer dat de formule klopt met de gegevens bij $x = 10$ en $x = 60$.
- Hoe hoog komt de bal maximaal volgens dit model?
- Hoeveel meter vanaf de afslag komt de bal volgens dit model weer op de grond?
- De formule komt niet overeen met één van de meetwaarden in de tabel. Bij welke waarde van x is dat? Hoeveel cm wijkt de hoogte die de formule geeft af van de gemeten waarde?

62
□ ⊙ *

Een experiment met bacteriën in een laboratorium begint op 1 september om 0:00 uur met 200 miljoen bacteriën. Uit metingen blijkt dat het aantal bacteriën op 1 september met 7 miljoen afneemt en op 6 september toeneemt van 285 miljoen tot 368 miljoen. De laborant neemt op grond van deze metingen aan dat het aantal bacteriën wordt gegeven door het model $N = t^3 - 8t + 200$. Hierin is N het aantal in miljoenen en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 september om 0:00 uur.

- Controleer dat de formule overeenkomt met de gegevens.
- Op welke datum neemt volgens dit model het aantal bacteriën voor het eerst met meer dan 200 miljoen toe?
- Maak een schets van de grafiek bij de formule waaruit blijkt dat er een tijdstip is waarop het aantal bacteriën minimaal is en bereken het minimale aantal bacteriën.

A63


Een thermosfles wordt getest door deze te vullen met kokendheet water. Daarna wordt op verschillende tijdstippen de temperatuur van het water in de fles gemeten. Zie de tabel, waarin T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ is na t minuten.

t	0	9	19	31	46	65
T	100	90	80	70	60	50

a Licht toe dat bij de tabel geen lineair verband hoort.

De onderzoeker gaat uit van het model $T = 80 \cdot 0,985^t + 20$.

b Controleer of het model bij benadering klopt met de gegevens.

c Wat is volgens het model de temperatuur na een uur?

d Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van het water in de thermosfles gedaald is tot 40°C .

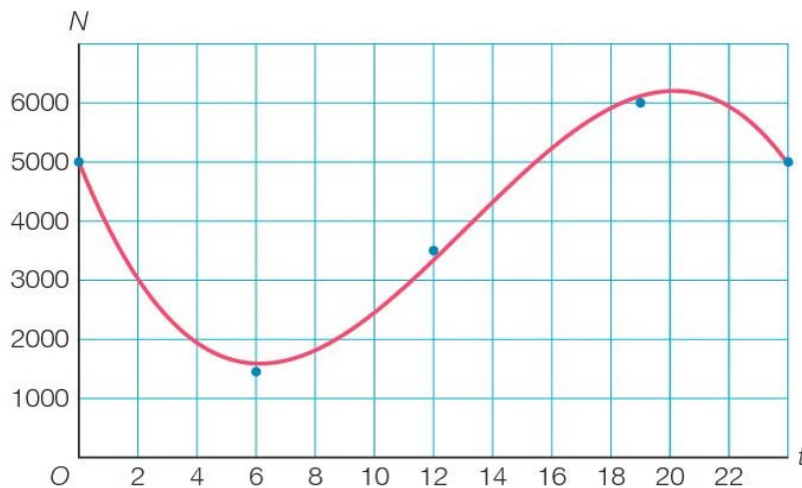
e In het model is er rekening mee gehouden dat het water op den duur de temperatuur van de omgeving aanneemt.

Beredeneer wat deze omgevingstemperatuur is.



A64


Het aantal bezoekers van een website is op een doordeweekse dag om zes uur 's morgens minimaal met 1450 bezoekers en om zeven uur 's avonds maximaal met 6000 bezoekers. Verder is om 12 uur het aantal bezoekers 3500. En om 0 uur en 24 uur zijn er 5000 bezoekers. In de figuur hieronder zijn deze gegevens als punten getekend. Bovendien is de grafiek bij het model $N = -3,35t^3 + 132t^2 - 1240t + 5000$ getekend. Hierbij is N het aantal bezoekers en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0 uur.



figuur 11.22

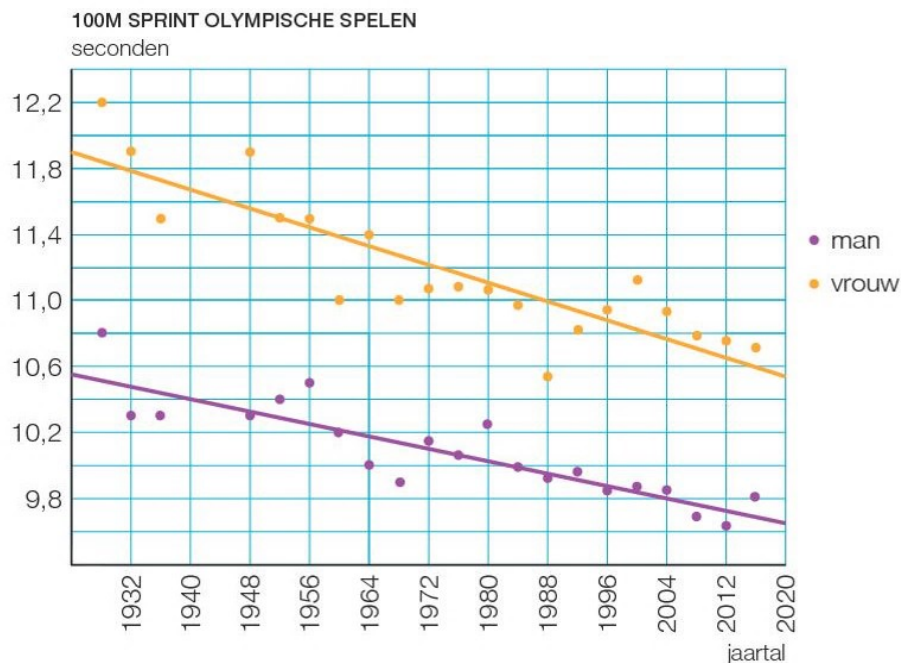
a Het minimale aantal bezoekers in het model wijkt af van het werkelijke minimum.

Hoeveel procent scheelt het?

b Het tijdstip waarop het maximale aantal bezoekers wordt bereikt, wijkt in het model af van de werkelijkheid.

Hoeveel minuten scheelt het?

Bij het atletiekonderdeel 100 meter sprint op de Olympische Spelen verbeteren de vrouwen zich sneller dan de mannen. Zie de figuur hieronder met de tijden van de vrouwelijke en mannelijke winnaars en de bijbehorende lineaire modellen. De Olympische Spelen worden om de vier jaar gehouden.



figuur 11.23

Tijdens de Olympische Spelen van 1948 in Londen was de Nederlandse Fanny Blankers-Koen de snelste vrouw op de 100 meter.

- Is dat vergeleken met het model een snelle of langzame tijd? Licht toe.
- Jim Hines was de eerste atleet die bij de Olympische Spelen de 100 meter sprint in minder dan 10 seconden liep.
In welk jaar was dat?

Bij het model voor de winnende tijden van de vrouwen hoort de formule $V = -0,0142t + 12,237$ met V in seconden en t in jaren met $t = 0$ in 1900.

- Gebruik het model om te voorspellen in welk jaar tijdens de Olympische Spelen voor het eerst een vrouw de mijlpaal van minder dan 10 seconden zal bereiken.
- De formule bij het model voor de winnende tijden van de mannen is van de vorm $M = at + b$ met M in seconden en t in jaren met $t = 0$ in 1900.
Stel de formule op. Gebruik daarbij dat het model bij 1940 een tijd van 10,4 seconden geeft en bij 2004 een tijd van 9,8 seconden.
- In welk jaar zouden volgens de modellen tijdens de Olympische Spelen de vrouwen voor het eerst sneller zijn dan de mannen? Welke tijd hoort daarbij?
- In 1988 won Florence Griffith Joyner de gouden medaille. Ze had een tijd van 10,54 seconden en sindsdien is geen enkele vrouw sneller geweest op de 100 meter tijdens Olympische Spelen.
Bereken haar gemiddelde snelheid in km/uur. Rond af op één decimaal.
- Wat zou volgens het model de gemiddelde snelheid in km/uur van de snelste vrouw zijn tijdens de Spelen in 2200? Wat zegt je antwoord over de bruikbaarheid van deze lineaire modellen om voorspellingen te doen die ver in de toekomst liggen? Licht toe.

Gegeven is de tabel hiernaast. Bij de tabel hoort een formule van de vorm $Q = \frac{a}{P^{1,5}}$.

P	4	7	9	12
Q	12,5	5,4	3,7	2,4

Met $P = 4$ en $Q = 12,5$ kun je berekenen dat $a = 100$.

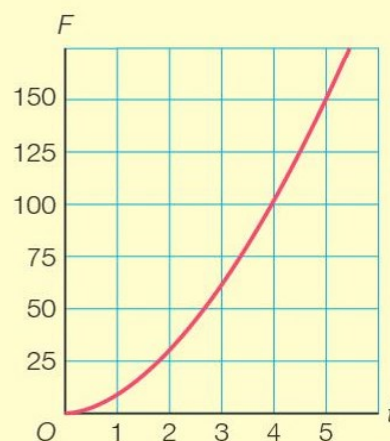
- Laat deze berekening zien.
- Controleer met de gevonden formule of de andere punten van de tabel bij deze formule horen.

Theorie B Modellen bij tabellen en grafieken

In figuur 11.24 is F uitgezet tegen t . Als gegeven is dat bij de grafiek een formule hoort van de vorm $F = at^{1,75}$, dan kun je met het invullen van de coördinaten van een geschikt gekozen punt de waarde van a berekenen. Lees af $t = 5$ en $F = 150$.

Invullen geeft $a \cdot 5^{1,75} = 150$, dus $a = \frac{150}{5^{1,75}} = 8,972\dots$

Afgerond op gehelen is $a = 9$, dus de formule is $F = 9t^{1,75}$.



figuur 11.24

Voorbeeld

Gegeven is de tabel hiernaast.

- Laat zien dat K niet omgekeerd evenredig is met t .

t	1	2	3	4	5
K	50	23,3	14,9	11,9	8,5

Bij de tabel hoort een verband van de vorm $K = \frac{50}{t^c}$.

- Bereken c . Rond af op één decimaal.

Uitwerking

- Als K omgekeerd evenredig is met t , dan geldt $K = \frac{a}{t}$.

$t = 1$ en $K = 50$ geeft $\frac{a}{1} = 50$, dus $a = 50$.

$t = 5$ en $K = 8,5$ geeft $\frac{a}{5} = 8,5$, dus $a = 42,5$.

Niet dezelfde a , dus K is niet omgekeerd evenredig met t .

- $$K = \frac{50}{t^c} \quad \left. \begin{array}{l} t = 5 \text{ en } K = 8,5 \end{array} \right\} \frac{50}{5^c} = 8,5$$

Voer in $y_1 = \frac{50}{5^x}$ en $y_2 = 8,5$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,1$.

Dus $c = 1,1$.

R67


Zie het voorbeeld.

- a** Onderzoek waarom bij vraag b $t = 1$ en $K = 50$ niet geschikt zijn om c te berekenen.
b Onderzoek of je ook $c = 1,1$ krijgt als je $t = 3$ en $K = 14,9$ gebruikt.

Zie de theorie.

Uit figuur 11.24 is het punt $(5, 150)$ gebruikt om a te berekenen, omdat dit punt goed af te lezen is in de grafiek.

- c** Waarom is het niet verstandig om het punt $(0, 0)$ te gebruiken om a te berekenen?
d Onderzoek of je ook $a = 9$ krijgt als je het punt bij $t = 4$ gebruikt.

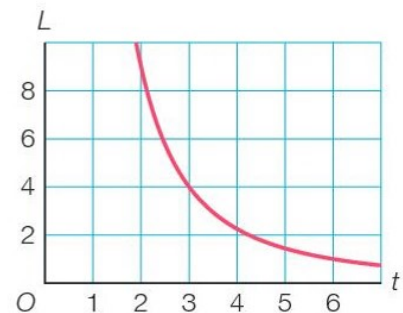
68


Gegeven is de grafiek hiernaast.

- a** Laat met berekeningen zien dat L niet omgekeerd evenredig is met t .

Bij de grafiek hoort een verband van de vorm $L = \frac{36}{t^b}$.

- b** Bereken b .



figuur 11.25

69


Gegeven is de tabel hiernaast.

- a** Onderzoek of N evenredig is met t .
b Onderzoek of er een lineair verband bestaat tussen t en N .

t	4	9	14	18
N	94	195	290	364

Bij de tabel hoort een verband van de vorm $N = 27t^b$.

- c** Bereken b . Rond af op één decimaal.

A70


In opgave 59 heb je kunnen lezen dat tussen 1970 en 2020 het aantal wilde vogels in Noord-Amerika is afgenomen van 10 miljard tot 7 miljard. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van deze afname. Hierin is N het aantal wilde vogels in miljarden en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1970. Tussen 1970 en 1990 is de afname exponentieel.

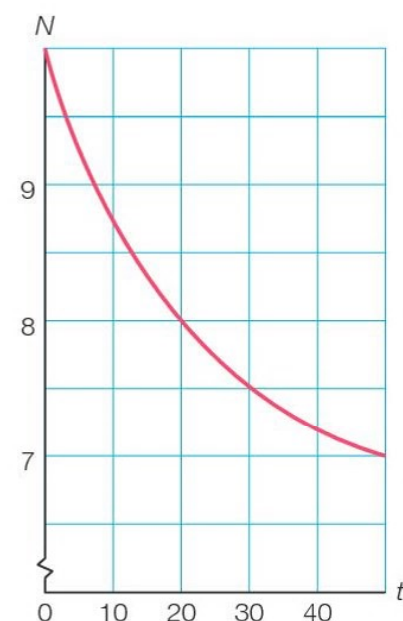
- a** Stel de formule op die bij deze exponentiële afname hoort en bereken met deze formule wat het aantal wilde vogels zou zijn geweest in 2020.

De exponentiële afname zet zich na 1990 niet voort, want in 2020 is $N = 7$.

Een onderzoeker overweegt twee modellen voor het aantal wilde vogels vanaf 1990. De formules zijn van de vorm

$$N_I = 6(1 + g^t) \text{ en } N_{II} = \frac{12,4}{t^b} \text{ met } t \text{ in jaren en } t = 0 \text{ in 1970.}$$

- b** Gebruik de gegevens van 1990 om g en b te berekenen en controleer hiermee welk model het beste klopt voor 2020.



figuur 11.26

71
⊗*

Bij de tabel hiernaast hoort een formule van de vorm

$$N = \frac{400}{1 + 20 \cdot g^t}$$

Bereken g . Rond af op twee decimalen.

t	0	8	14	19
N	19	99	230	326

A72
⊗*

De veelgebruikte vuistregel dat een hondenleeftijd keer zeven gelijk is aan een mensenleeftijd klopt niet. Uit deze vuistregel volgt bijvoorbeeld dat een hondenleeftijd van 2 jaar vergelijkbaar is met een mensenleeftijd van 14 jaar. In werkelijkheid is in dit geval een mensenleeftijd van ongeveer 40 jaar een veel betere schatting. Bovendien is er bij hondenleeftijden een verschil tussen kleine rassen (tot 15 kg), middelgrote rassen (15 tot 45 kg) en grote rassen (vanaf 45 kg).

In de tabel hiernaast zie je een omrekening die de situatie veel beter weergeeft.

Voor alle rassen kun je een model van de vorm $m = 30\sqrt{h} + ah$ gebruiken. Hierin is h de hondenleeftijd in jaren, m de mensenleeftijd in jaren en a een getal dat afhangt van de grootte van het ras. Voor kleine rassen geldt $a = -1,8$.

Er is bij kleine rassen een hondenleeftijd tussen 11 en 12 jaar waarbij het model $m_{\text{klein}} = 30\sqrt{h} - 1,8h$ dezelfde mensenleeftijd oplevert als de vuistregel.

leeftijd hond	mensenjaren		
	klein ras	middelgroot ras	groot ras
1	28	29	30
2	39	40	43
4	53	56	60
10	77	84	95
15	89	100	
20	100		

- Bereken deze hondenleeftijd in één decimaal.
- Bereken bij welke hondenleeftijd het verschil tussen het model en de vuistregel maximaal is. Hoeveel is dit maximale verschil in mensenjaren? Rond af op één decimaal.

Volgens het model worden honden van middelgrote rassen maximaal 15 jaar oud. Stel dat een hond van een middelgroot ras met pensioen mag als een mensenleeftijd van 67 jaar is bereikt.

- Bereken de waarde van a die hoort bij middelgrote rassen en gebruik deze om de pensioenleeftijd van deze hond te berekenen. Rond af op één decimaal.

A73
*

Zie opgave 72.

Een hond van een groot ras wordt volgens het model maximaal 100 mensenjaren oud.

- Hoe oud wordt een hond van een groot ras maximaal in hondenjaren? Rond af op gehele.

Het verschil tussen m_{groot} en m_{klein} neemt toe bij toenemende hondenjaren. Hierbij is m_{groot} de mensenleeftijd in het model bij de grote rassen.

- Bereken bij welke hondenleeftijd het verschil tussen m_{groot} en m_{klein} 10 jaar is. Rond af op één decimaal.

Terugblik

Modelvorming

Een wiskundig model is een formule, een grafiek of een ander wiskundig instrument waarmee je de werkelijkheid benadert. Omdat je met een benadering werkt, moet je voorzichtig zijn met het trekken van conclusies. Om een betere benadering te krijgen kan het noodzakelijk zijn het model te verfijnen of bij te stellen.

Bij de tabel hiernaast wordt een exponentieel model opgesteld.

Je krijgt $g_{9 \text{ dagen}} = \frac{22,9}{91,7}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{22,9}{91,7}\right)^{\frac{1}{9}} = 0,8571\dots$

$t = 3$ en $N = 91,7$ invullen in $N = b \cdot 0,8571\dots^t$ geeft $N \approx 146$, dus het model is $N = 146 \cdot 0,857^t$.

Het blijkt dat voor $t = 7$ geldt dat $N = 39,3$. De formule geeft $N = 146 \cdot 0,857^7 \approx 49,6$. Hieruit volgt dat het exponentiële model niet klopt met alle gegevens.

Je kunt controleren dat het model $N = \frac{275}{t}$ beter past bij de drie gegevens.

$t = 3$ geeft $N = \frac{275}{3} \approx 91,7$

$t = 7$ geeft $N = \frac{275}{7} \approx 39,3$

$t = 12$ geeft $N = \frac{275}{12} \approx 22,9$

t in dagen	3	12
N	91,7	22,9

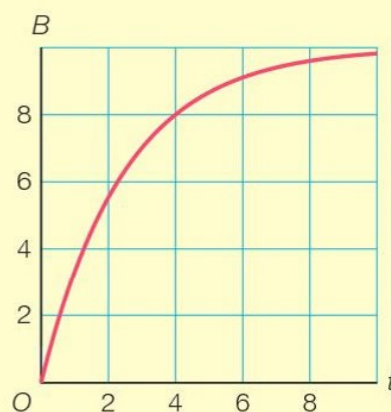
Modellen bij tabellen en grafieken

Bij de tabel hiernaast hoort een formule van de vorm $A = 20t^b$. Invullen van $t = 12$ en $A = 129$ geeft $20 \cdot 12^b = 129$. Deze vergelijking los je op met de GR. Je krijgt $b \approx 0,75$ en de formule is $A = 20t^{0,75}$.

Bij de grafiek hiernaast hoort een formule van de vorm $B = 10(1 - g^t)$. Lees een geschikt punt af, bijvoorbeeld $(4, 8)$. Invullen van $t = 4$ en $B = 8$ geeft de vergelijking $10(1 - g^4) = 8$.

Oplossen met de GR geeft $g \approx 0,67$ en de formule is $B = 10(1 - 0,67^t)$.

t	1	5	9	12
A	20	67	104	129



Eindopdracht Toprozen op de veiling

Kweker Jansma is gespecialiseerd in het kweken van rozen met het predicaat Toproos.

Jansma verkoopt deze rozen elke vrijdag op de veiling. Daar worden dan ook door andere kwekers Toprozen aangeboden.

Voor het bedrag dat Jansma per Toproos ontvangt hanteert hij een model. Het bedrag is omgekeerd evenredig met het totaal aantal Toprozen dat op de veiling wordt aangeboden. Als er in totaal 8000 Toprozen worden aangeboden, is de prijs per roos

60 cent. Hieruit volgt de formule $p = \frac{4800}{T}$.

Hierin is p de prijs per roos in euro's en T het totaal aantal Toprozen dat op die dag op de veiling wordt aangeboden.

- Laat zien hoe de formule $p = \frac{4800}{T}$ uit de gegevens volgt.



Op een vrijdag biedt Jansma 1000 Toprozen aan op de veiling. Hij ontvangt hiervoor in totaal 640 euro.

- Hoeveel Toprozen bieden de andere kwekers die dag aan op de veiling?

Op een vrijdag bieden de andere kwekers samen 4500 Toprozen aan op de veiling.

Voor de Toprozen die Jansma die dag aanbiedt, ontvangt hij een bedrag van 1200 euro.

- Hoeveel Toprozen heeft Jansma die dag op de veiling aangeboden?

We noemen het aantal Toprozen dat Jansma op een vrijdag aanbiedt J en het aantal Toprozen dat de andere kwekers samen aanbieden A .

- Druk het bedrag B in euro dat Jansma op een vrijdag ontvangt uit in J en A .

Op een vrijdag bieden de andere kwekers samen 5000 Toprozen aan. Jansma ontvangt een bedrag van 1250 euro voor zijn Toprozen.

- Welk bedrag ontvangt hij per roos?

Op een vrijdag bieden de andere kwekers samen 4000 Toprozen meer aan dan Jansma. Op deze dag ontvangt Jansma voor zijn Toprozen in totaal 1025 euro.

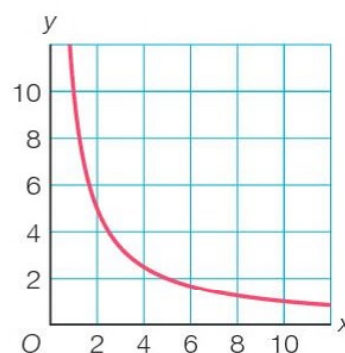
- Hoeveel Toprozen heeft Jansma die dag aangeboden? Hoeveel leverde een Toproos die dag per stuk op?

Diagnostische toets

11.1 Grafieken en gebieden

- 1** Bij een bepaald OV-bedrijf geldt voor het bedrag B in eurocenten op je OV-chipkaart na een rit de formule $B = -15k + S$. Hierin is k het aantal gereden kilometers en S het saldo vóór de rit in eurocenten.
- a** Bereken na hoeveel kilometer er geen geld meer op je kaart staat bij een saldo van 3 euro vóór de rit.
 - b** Teken in één figuur de grafieken die horen bij een saldo van 1,50 euro en 3,50 euro.
 - c** Kleur in de figuur van vraag b het gebied dat hoort bij een saldo tussen 1,50 euro en 3,50 euro en waarbij het bedrag meer dan 1 euro is.
 - d** Myra wil berekenen na hoeveel kilometer het bedrag op haar kaart nog 2 euro is bij verschillende saldo's.
Neem $B = 200$ en schrijf de formule in de vorm $k = aS + b$. Rond a en b af op twee decimalen.

- 2** [WERKBLAD] Op het werkblad is de grafiek van $xy = 10$ getekend.
Teken op het werkblad het gebied waarvoor geldt $xy \geq 10$ en $x \leq 6$ en $0,5x + 0,5y \leq 5$.



figuur 11.27

11.2 Herleiden en combineren van formules

- 3**
- a** Schrijf de formule $N = \frac{25}{50 \cdot 0,4^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$.
 - b** Maak p vrij bij de formule $9q = 1,5 \cdot \sqrt{16p}$.
 - c** Neem $L = 2$ in de formule $x \cdot L^2 = y - \frac{4 - 6x}{L}$ en maak y vrij.
 - d** Druk q uit in V bij $\frac{5V}{6q + 7} = 8$. Rond af op twee decimalen.
- 4**
- a** Je kunt de formules $R = 2xy - 5$ en $y = 3x + 2$ combineren tot de formule $R = 6x^2 + 4x - 5$.
Laat dat zien.
 - b** Gegeven zijn de formules $L = 6p - 5q + 2$ en $q = 3p - 2$.
Herleid de formule van L tot de vorm $L = aq + b$.

- 5** Voor de dagelijkse kosten K in eurocenten voor het gebruik van een elektrisch apparaat geldt de formule $K = \frac{p \cdot W}{0,417}$, met p de prijs van elektriciteit in euro per kilowattuur en W het vermogen van het apparaat in watt.
- a** De dagelijkse kosten voor het gebruik van een apparaat van 200 watt zijn 106 eurocent.
Bereken p . Rond af op twee decimalen.
 - b** Anne heeft in 2020 een nieuwe koelkast aangeschaft en op hetzelfde moment werd ze klant bij een nieuwe energieleverancier. Deze hanteert de formule $p = 0,25 - 0,01j$. Verder geldt voor de koelkast $W = 30 + j$. In beide formules is j de tijd in jaren sinds 2020.
Herleid de formule van K tot de vorm $K = aj^2 + bj + c$. Rond a en b af op twee decimalen en c op gehelen.

11.3 Evenredigheden

- 6** Gegeven is dat het dagelijks aantal verkochte croissantjes C in een supermarkt omgekeerd evenredig is met de prijs p per croissant in euro. Voor $p = 1,20$ is $C = 40$.
- a** Stel de formule op van C .
 - b** Op een dag zijn de croissantjes in de aanbieding van 1,50 euro voor 1,20 euro.
Hoeveel meer croissantjes worden die dag verkocht vanwege de aanbieding?

11.4 Redeneren met formules

- 7** Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.
- a** $K = 4 - \frac{7}{p}$ met $p > 0$
 - b** $y = \frac{1200}{1,2x^4 + \sqrt{x}} + 5,2$

11.5 Wiskundige modellen

- 8** Zie de tabel hiernaast.
- a** Volgens Marloes hoort het model $y = -0,47x + 25,5$ bij de tabel.
Controleer of dat bij benadering klopt.
 - b** Volgens Adriaan hoort er een formule van de vorm $y = 5\left(1 + \frac{4}{x^p}\right)$ bij de tabel.
Bereken p . Rond af op één decimaal.

x	1	20	32
y	25	16	15